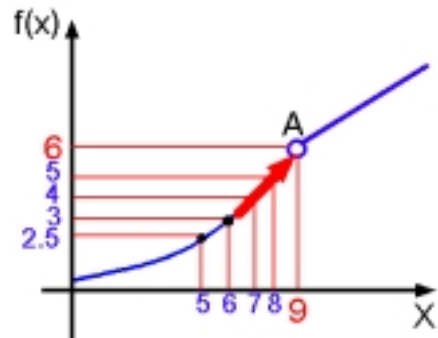


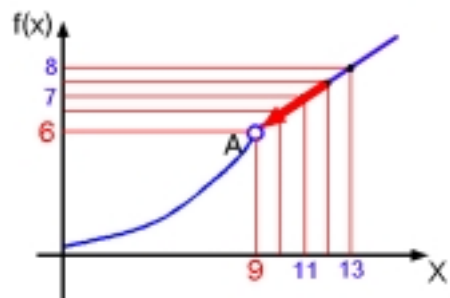
คณิตศาสตร์ บทที่ 17 แคลคูลัสเบื้องต้น

ตอนที่ 1 ลิมิตของฟังก์ชัน

1. จากกราฟของฟังก์ชันที่กำหนด จะได้ว่าเมื่อค่า  $x$  มีค่าเข้าใกล้ 9 แล้วค่า  $f(x)$  จะเข้าใกล้.....  
เขียนเป็นสัญลักษณ์จะได้ .....  
สัญลักษณ์นี้อ่านว่า .....  
เนื่องจากลิมิตนี้พิจารณาจุดที่  $x$  น้อยกว่า 9 จึงเรียก  
ลิมิตนี้ว่า .....



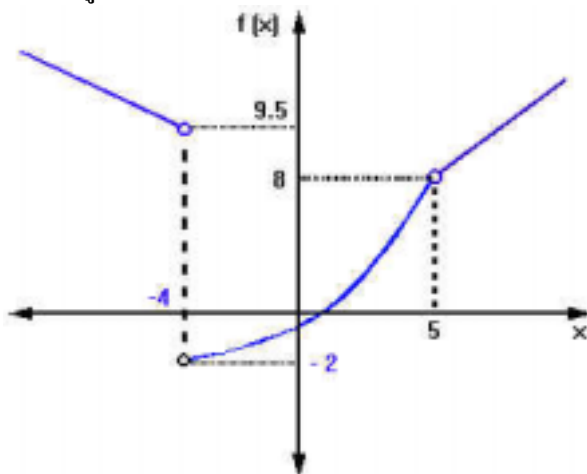
2. จากกราฟของฟังก์ชันที่กำหนด จะได้ว่าเมื่อค่า  $x$  มีค่าเข้าใกล้ 9 แล้วค่า  $f(x)$  จะเข้าใกล้.....  
เขียนเป็นสัญลักษณ์จะได้ .....  
สัญลักษณ์นี้อ่านว่า .....  
เนื่องจากลิมิตนี้พิจารณาจุดที่  $x$  มากกว่า 9 จึงเรียก  
ลิมิตนี้ว่า .....



3. จากโจทย์ที่ผ่านมาลิมิตซ้ายและลิมิตขวามีค่าเท่ากัน จึงเขียนสัญลักษณ์รวมเป็น .....  
ลิมิตนี้เรียกว่า .....

4. ลิมิตรวมจะหาค่าได้ก็ต่อเมื่อ .....

5. จากรูปจงหาค่า



$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \dots\dots\dots$  (8)

$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \dots\dots\dots$  (8)

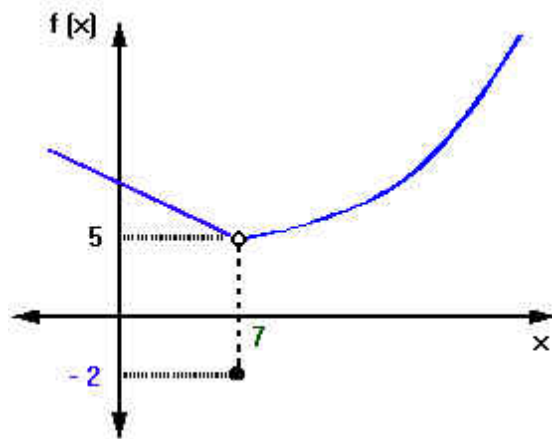
$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \dots\dots\dots$  (8)

$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \dots\dots\dots$  (9.5)

$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \dots\dots\dots$  (-2)

$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = \dots\dots\dots$  (หาค่าไม่ได้)

6. จากรูปจงหาค่า



$$\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = \dots\dots (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = \dots\dots (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = \dots\dots (5)$$

$$f(7) = \dots\dots (-2)$$

7. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน  $y = g(t)$  ให้ดังแสดงในรูป แล้วจงหาค่าต่อไปนี้

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \dots\dots (-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \dots\dots (-2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \dots\dots (-)$$

$$f(0) = \dots\dots (-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \dots\dots (2)$$

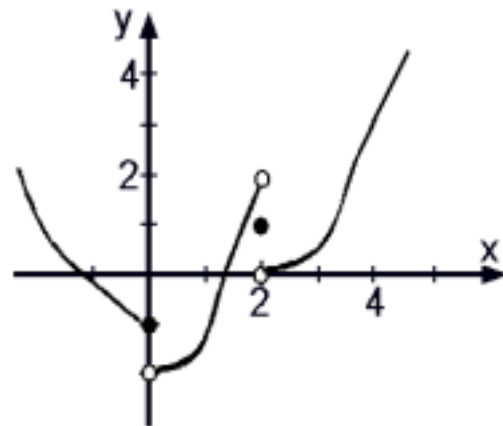
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \dots\dots (0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \dots\dots (-)$$

$$f(2) = \dots\dots (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \dots\dots (3)$$

$$f(4) = \dots\dots (3)$$



## การคำนวณหาค่าลิมิต

**โจทย์แบบที่ 1** ใช้สมบัติโดยตรง

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} C = C \quad \text{เมื่อ } C \text{ เป็นค่าคงตัวใดๆ}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

$$(7) \text{ ถ้า } f(x) \text{ เป็นฟังก์ชันโพลิโนเมียล แล้วจะได้ } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

คือ ถ้าผลการแทนที่ได้เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว คำนั่นๆ คือค่าของ  $\lim f(x)$

**ตัวอย่างเช่น**  $\lim_{x \rightarrow 4} 5 = 5$

$$\lim_{x \rightarrow 7} 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 5) = 3(1)^2 + 5 = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} |x^2 + 1| = 2^2 + 1 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 49} (\sqrt{x} + 1) = \sqrt{49} + 1 = 7 + 1 = 8$$

8. จงหาค่าต่อไปนี้

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} (-2) \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 5) \quad 3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^3 + 4}{x - 3} \quad (-2, 3, -44)$$

**วิธีทำ**

**โจทย์แบบที่ 2** ถ้าผลการแทนค่าได้เป็นรูป  $\frac{\text{ตัวเลข}}{0}$  แล้วลิมิตของ  $f(x)$  “หาค่าไม่ได้”

$$\text{เช่น } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x^2 + 4}{x - 3} = \frac{5(3)^2 + 4}{3 - 3} = \frac{49}{0} \text{ หาค่าไม่ได้}$$

9. กำหนด  $f(x) = \frac{1}{x}$  แล้ว  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  มีค่าตรงกับค่าในข้อใด

1. 0                      2. 1                      3. -1                      4. ไม่มีลิมิต (ข้อ 4)

วิธีทำ

10. จงหาค่าของ  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x}{|2x - 2|}$  (ไม่มีลิมิต)

วิธีทำ

**โจทย์แบบที่ 3** ถ้าผลการแทนค่าได้รูป  $\frac{0}{0}$  หรือ  $\frac{\infty}{\infty}$  ให้เลือกใช้เทคนิคต่อไปนี้

- 1) แยกตัวประกอบแล้วตัด
- 2) ใช้ตัวคล้ายสังยุคคูณทั้งเศษและส่วน
- 3) ใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชันเข้าช่วย

11. จงหาค่า  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$  (4)

วิธีทำ

12. จงหาค่า  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$  (6)

วิธีทำ

13. จงหาค่า  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$  ( $\frac{4}{5}$ )

วิธีทำ

14. จงหาค่า  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 7x}{x}$  (7)

วิธีทำ

15. จงหาค่า  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3\sqrt{x} - 6}{x - 4}$  ( $\frac{3}{4}$ )

วิธีทำ

16. จงหาค่าของ  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$  (1/6)

วิธีทำ

17. จงหาค่า  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x^3 - 27}{x^2 - 5x + 6} \right)$  (27)

วิธีทำ

18. จงหาค่า  $\lim_{y \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{y}}{2 - y}$  ( $-\frac{1}{4}$ )

วิธีทำ

19. กำหนดให้  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$  ข้อใดต่อไปนี้เป็นถูก

1.  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 0$  และ  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  หาค่าไม่ได้

2.  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 0$  และ  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$

3.  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 0$  และ  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -6$

4.  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$  หาค่าไม่ได้ และ  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$  (ข้อ 2)

วิธีทำ

20. จงหาค่า  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{5-x}}{2x}$   $\left(\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)$

วิธีทำ

21. จงหาค่าของ  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{2x + \sqrt{x^2 + 3}}$   $\left(\frac{2}{3}\right)$

วิธีทำ

**โจทย์แบบที่ 4** หากเป็นโจทย์ซึ่ง การหาขีดซ้ายและขีดขวา ใช้ฟังก์ชัน ไม่เหมือนกัน ต้องแยก  
คิดเป็นขีดซ้าย และขีดขวา หากขีดซ้าย ขวา มีคำตอบตรงกัน ให้ใช้เป็นคำตอบได้เลย  
หากขีดซ้าย ขวา มีค่าไม่เท่ากัน จะหาคำตอบไม่ได้

22. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{3-x} & , \quad x < 2 \\ \sqrt{x+23} & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

จงหาค่า  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  (5)

วิธีทำ

23. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x \leq 1 \\ \frac{1}{x-2} & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$$

จงหาค่า  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  (หาค่าไม่ได้)

วิธีทำ

24. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x < 0 \\ x^2 & \text{เมื่อ } 0 < x \leq 2 \\ 8 - x & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$$

จงหา (1)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$       (2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$       (3)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$   
 (4)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$       (5)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$       (6)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

วิธีทำ

(1.0 2.0 3.0 4.4 5.6 6.--)

25. กำหนดให้  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  จงหาค่าของ

1.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$       2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$       3.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$       (-1, 1, หาไม่ได้)

วิธีทำ

26. กำหนดให้  $f(x) = \frac{|x|}{x} - x$

จงหา  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$       (หาค่าไม่ได้)

วิธีทำ

27. จงหาค่าของ  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{|x-4|}{x-4}$  (-1)

28. ค่าของ  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2}$  มีค่าตรงกับค่าในข้อใด

1. 0                      2. 1                      3. 1, -1                      4. ไม่มีขีดจำกัด (ข้อ 4)

วิธีทำ

29. กำหนดให้  $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{เมื่อ } x \leq 2 \\ 2x & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$  จงหาค่า

1.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$                       2.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$                       3.  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  (หาไม่ได้, 1, 6)

วิธีทำ

**ตอนที่ 2 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน**

**นิยาม** ฟังก์ชัน  $f(x)$  ใดๆ จะมีความต่อเนื่องที่จุด  $x = a$  ได้ก็ต่อเมื่อ

1) สามารถหาค่า  $f(a)$  โดยตรงได้

กล่าวคือ เมื่อแทนค่า  $x$  ในฟังก์ชัน ด้วย  $a$  ตรงๆ สามารถหาคำตอบได้

2) สามารถหา  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ได้

3)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

30. กำหนดให้  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x \neq 3 \\ 2x+3 & \text{เมื่อ } x = 3 \end{cases}$

ฟังก์ชันนี้ต่อเนื่องที่  $x = 3$  หรือไม่

(ต่อเนื่อง)

**วิธีทำ**

31. ให้  $f(x) = \begin{cases} x^3 - 27 & \text{เมื่อ } x \neq 3 \\ 27 & \text{เมื่อ } x = 3 \end{cases}$

ฟังก์ชันนี้ต่อเนื่องที่  $x = 3$  หรือไม่

(ไม่ต่อเนื่อง)

**วิธีทำ**

$$32(\text{มข } 42) \text{ กำหนด } f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{เมื่อ } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{เมื่อ } x = 1 \end{cases}$$

จงพิจารณาว่า แต่ละข้อต่อไปนี้ ข้อใดถูก

1.  $f$  เป็นฟังก์ชันที่ ไม่มี ลิมิตที่ 1
2.  $f$  เป็นฟังก์ชันที่ มี ลิมิตที่ -1
3.  $f$  เป็นฟังก์ชัน ต่อเนื่อง ที่  $x = 1$
4.  $f$  เป็นฟังก์ชัน ต่อเนื่อง ที่  $x = -1$

(ข้อ 3)

วิธีทำ

$$33. \text{ กำหนดให้ } f(x) = \begin{cases} -1 & , x = 0 \\ \frac{x+3}{3-x} & , 0 < x < 2 \\ \sqrt{x+23} & , x = 2 \end{cases}$$

ฟังก์ชันนี้มีความต่อเนื่องที่จุด  $x=0$  หรือไม่

(ไม่ต่อเนื่อง)

วิธีทำ

$$-1, x < 0$$

34. กำหนดให้  $f(x) = \frac{x+3}{3-x}, 0 < x < 2$

$$\sqrt{x+23}, x > 2$$

ฟังก์ชันนี้มีความต่อเนื่องที่จุด  $x = 2$  หรือไม่

(ต่อเนื่อง)

วิธีทำ

35. กำหนด  $f(x) = \frac{x^2 - x}{2x}$  เมื่อ  $x > 0$

$$k \text{ เมื่อ } x = 0$$

จงหาค่า  $k$  ที่ทำให้ฟังก์ชันนี้ต่อเนื่องที่จุด  $x = 0$

(-1/2)

วิธีทำ

36(มข 44) กำหนด  $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 5x - 6| & \text{เมื่อ } x > 2 \\ 10x - k & \text{เมื่อ } x < 2 \end{cases}$

จงหาค่า  $k$  ที่ทำให้  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 2$

(8.00)

วิธีทำ

XX

### ตอนที่ 3 อัตราการเปลี่ยนแปลง

พิจารณาฟังก์ชัน  $y = f(x)$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ  $y$  เทียบกับ  $x$  คือ อัตราส่วนของค่า  $y$  ที่เปลี่ยนไป ต่อค่า  $x$  ที่เปลี่ยน

เขียนย่อๆ จะได้ Rate  $y/x = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\text{Rate } y/x = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{กำหนด } x_1 = x$$

$$y_1 = f(x)$$

$$x_2 = x + h$$

$$y_2 = f(x + h)$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = (x + h) - x = h \quad \Delta y = y_2 - y_1 = f(x + h) - f(x)$$

ดังนั้น Rate  $y/x = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

เมื่อ  $x$  คือ ค่า  $x$  ที่จุดเริ่มต้น และ  $h$  คือ ค่าของ  $x$  ที่เปลี่ยนไป

37. ให้  $y = 3x^2 - 7$  จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ  $y$  เทียบกับ  $x$

1) เมื่อ  $x$  เปลี่ยนจาก 4 ไปเป็น 4.1 (24.3)

2) อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะ  $x = 4$  (24)

วิธีทำ

38. ให้  $y = 2x^2 - 3$  จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ  $y$  เทียบกับ  $x$

1) เมื่อ  $x$  เปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น 2.2 (8.4)

2) อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะ  $x = 2$  (8)

วิธีทำ

39. ปริมาณของควันทึบในอากาศ  $N$  เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา  $t$  ตามสมการ  $N = t^2 + 5$

จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของควันทึบในอากาศขณะ  $t = 3$  (6)

วิธีทำ



41. จงหาค่าต่อไปนี้

1.  $\frac{d}{dx} x^8 = \dots\dots\dots (8x^7)$

2.  $\frac{d}{dx} x^{12} = \dots\dots\dots (12x^{11})$

3.  $\frac{d}{dx} x^{26} = \dots\dots\dots (26x^{25})$

4.  $\frac{d}{dx} x^{-3} = \dots\dots\dots (-3x^{-4})$

5.  $\frac{dx^{-7}}{dx} = \dots\dots\dots (-7x^{-8})$

6.  $\frac{d}{dx} \frac{1}{x^3} = \dots\dots\dots (-3x^{-4})$

7.  $\frac{dx^{\frac{5}{3}}}{dx} = \dots\dots\dots (\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}})$

8.  $\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \dots\dots\dots (\frac{1}{2\sqrt{x}})$

**สูตรที่ 4**  $\frac{d}{dx} c f(x) = c \frac{d}{dx} f(x)$  เมื่อ  $c$  เป็นค่าคงตัว

42. จงหาค่าต่อไปนี้

1.  $\frac{d}{dx} 8x = \dots\dots\dots (8)$

2.  $\frac{d}{dx} 2x^3 = \dots\dots\dots (6x^2)$

3.  $\frac{d}{dx} 4x^8 = \dots\dots\dots (32x^7)$

4.  $\frac{d}{dx} 6x^{-2} = \dots\dots\dots (-12x^{-3})$

5.  $\frac{d}{dx} \frac{x^{-4}}{2} = \dots\dots\dots (-2x^{-5})$

$$6. \frac{d}{dx} \left( \frac{16}{8} x^9 \right) = \dots\dots\dots \left( \frac{7}{3} x^9 \right)$$

$$7. \frac{d}{dx} 6\sqrt{x} = \dots\dots\dots \left( \frac{3}{\sqrt{x}} \right)$$

$$8. \frac{d}{dx} \sqrt{2x} = \dots\dots\dots \left( \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} \right)$$

**สูตรที่ 5**  $\frac{d(f(x) \cdot g(x))}{dx} = \frac{d f(x)}{dx} \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{d g(x)}{dx}$

43. จงหาค่าต่อไปนี้

$$1. \frac{d(x^3 + 2x^2 - 4x + 8)}{dx} = \dots\dots\dots (3x^2 + 4x - 4)$$

$$2. \frac{d(4x^4 + 3x^2 - 7)}{dx} = \dots\dots\dots (16x^3 + 6x)$$

$$3. \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x^5} + \frac{2}{x^3} \right) = \dots\dots\dots (-5x^{-6} - 6x^{-4})$$

$$4. \frac{d(x+2)(x-3)}{dx} = \dots\dots\dots (2x - 1)$$

$$5. \frac{d(x+2)^2}{dx} = \dots\dots\dots (2x + 4)$$

$$6. \frac{d}{dx} \left( \frac{x^3 + 3x}{x} \right) = \dots\dots\dots (2x)$$

44. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1)  $y = x^{-3} - 4x^{-5} - 3x^{-7}$

2)  $y = 2x^{20} + 10x^{13} - 2x^7$

วิธีทำ

45. จงหาอนุพันธ์ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$y = \frac{7}{8x^6} \quad \left(-\frac{21}{4} x^{-7}\right)$$

วิธีทำ

46. จงหาอนุพันธ์ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$y = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} + \frac{7}{x^6} \quad \left(-\frac{2}{x^3} - \frac{12}{x^5} - \frac{42}{x^7}\right)$$

วิธีทำ

47. จงหาอนุพันธ์ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$y = \sqrt{2\sqrt{2}\sqrt{2}\dots} \quad (0)$$

วิธีทำ

48(มข 31) ถ้า  $y = \frac{2x^3-2}{\sqrt{x}}$  แล้ว  $\frac{dy}{dx}$  มีค่าเท่ากับเท่าใด  $(5x\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}})$

วิธีทำ

49. กำหนด  $f(x) = x |x|$  ค่าของ  $f'(-2) + f'(3)$  เป็นเท่าใด

1. 10

2. -2

3. 2

4. 6

(ข้อ 1)

วิธีทำ

50. กำหนด  $f(x) = (x-3) |x-3|$  จงหาค่าของ  $f'(1)$

1. 4

2. -4

3. 0

4. 8

(ข้อ 1)

วิธีทำ

<b>สูตร 6</b> $\frac{d u^n}{d x} = n u^{n-1} \frac{d u}{d x}$ เมื่อ $u = f(x)$
--

51. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.  $y = (2x - 3)^8$  ( $16(2x - 3)^7$ )

2.  $y = \sqrt{4x - 8}$  ( $\frac{2}{\sqrt{4x - 8}}$ )

52. กำหนดให้  $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$  แล้วค่าของ  $f'(1)$  มีค่าเท่ากับค่าในข้อใด

1. 0                      2. 1                      3. 2                      4. ไม่มีอนุพันธ์ที่  $x = 1$       (**ข้อ 4**)

วิธีทำ

<b>สูตร 7</b> $\frac{d(u \cdot v)}{d x} = v \frac{d u}{d x} + u \frac{d v}{d x}$ เมื่อ $u = f(x)$ , $v = g(x)$
--

53. จงหาค่า  $\frac{d(4x+2)(x-8)^2}{d x}$  [  $4(x-8)^2 + (4x+2)(2x-16)$  ]

วิธีทำ

54. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$y = (x - 3)^3 (2x + 1)$$

$$[(6x + 3)(x - 3)^2 + 2(x - 3)^3]$$

วิธีทำ

55. กำหนด  $f(x) = x \cdot h(x)$  และ  $h(0) = 2$   $h'(0) = 1$  แล้วค่าของ  $f'(0)$  มีค่าเท่ากับ

1. 0

2. 2

3. 3

4. หาอนุพันธ์ไม่ได้ (ข้อ 2)

วิธีทำ

<b>สูตร 8</b> $\frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$	เมื่อ $u = f(x)$ , $v = g(x)$
---	-------------------------------

56. จงหาค่า

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{-x}{x-4} \right)$$

$$\left[ \frac{-4}{(x-4)^2} \right]$$

วิธีทำ

57. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$y = \left[ \frac{2x+1}{1-2x} \right] \quad \left[ \frac{4}{(1-2x)^2} \right]$$

วิธีทำ

58(En 42/2) ให้  $u$  และ  $v$  เป็นฟังก์ชันของ  $x$  โดยที่  $v(x) = x^2 - 2x$  ถ้า

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ และ } u(3) = -9, u'(3) = 3 \text{ แล้วค่าของ } f'(3) \text{ เท่ากับเท่าใด} \quad (5)$$

วิธีทำ

59(En 42/1) ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ  $f(3) = -2, f'(3) = 5$  ถ้า

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^2 + 1} \text{ แล้ว } g'(3) \text{ มีค่าเท่าใด} \quad (0.62)$$

วิธีทำ



62. กำหนดสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นหนึ่งเป็น  $s = t^3 + 2t - 1$  เมื่อ  $s$  แทนระยะทางเป็นเมตร และ  $t$  แทนเวลาเป็นวินาที จงหา

1. ความเร็วของวัตถุ ขณะเวลา  $t$  ( $3t^2 + 2$ )
2. ความเร็วของวัตถุ ในวินาทีที่ 3 (29)
3. ความเร่งของวัตถุ ในวินาทีที่ 5 (30)
4. ความเร็วเฉลี่ยในช่วงวินาทีที่ 2 ถึงวินาทีที่ 4 (30)

วิธีทำ

63. ปล่อยวัตถุจากที่สูงจากพื้นดิน วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง  $s = 16t^2$  เมตร ในเวลา  $t$  วินาที  
 จงหา 1. ระยะทางที่เคลื่อนที่ได้หลังจากปล่อยวัตถุไป 3 วินาที (144 ม.)  
 2. ความเร็วขณะเวลา  $t = 2$  วินาที (64 ม./วินาที)  
 3. ความเร่งขณะวินาทีที่  $t$  ใด (32 ม./วินาที<sup>2</sup>)  
 4. ความเร่งขณะเวลา  $t = 5$  วินาที (32 ม./วินาที<sup>2</sup>)

วิธีทำ

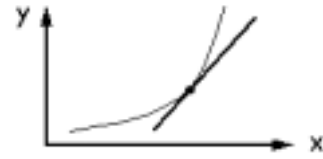
### ตอนที่ 6 ความชันเส้นโค้ง

#### หลักการ

ความชันเส้นโค้ง ณ จุดใดๆ จะเท่ากับความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดนั้นๆ

$$\text{จาก } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{dy}{dx}$$

จะเห็นว่า  $m = \frac{dy}{dx}$



#### ขั้นตอนการหาความชันเส้นโค้ง ณ จุดใดๆ

ขั้น 1 หา  $\frac{dy}{dx}$  ของฟังก์ชันเส้นโค้งนั้น

ขั้น 2 แทนค่า x หรือ y ของจุดนั้นๆ ลงใน  $\frac{dy}{dx}$

ขั้น 3 สรุปว่า  $m = \frac{dy}{dx}$  นั้น

64. กำหนดเส้นโค้งหนึ่งมีสมการเป็น  $y = x^2 + 2x + 3$  ค่าความชันของเส้นโค้ง ที่จุด (1, 6) มีค่าตรงกับค่าในข้อใด

1. -4                      2. 0                      3. 4                      4. 6                      (ข้อ 3)

#### วิธีทำ

65(มข 33) ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง  $y = \frac{1-x^4}{x^3}$  ณ จุด (1, 0) คือ ..... (-4)

#### วิธีทำ

66. จุดบนเส้นโค้ง  $y = x^2 - 3x - 4$  ที่มีความชันของเส้นสัมผัสเท่ากับ 1 คือข้อใด

1.  $(\frac{3}{2}, 0)$       2.  $(2, 0)$       3.  $\frac{3}{2}, \frac{25}{4}$       4.  $(2, -6)$       (ข้อ 4)

วิธีทำ

67. จงหาจุดบนเส้นโค้ง  $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$  ซึ่งเส้นสัมผัส ณ จุดนั้นขนานกับแกน x

1.  $(2, 0)$       2.  $(-1, 27)$       3.  $(2, 0)$  และ  $(-1, 27)$       4.  $(0, 20)$       (ข้อ 3)

วิธีทำ

68. เส้นโค้งหนึ่งมีสมการเป็น  $y = \frac{x^2 + 2}{x}$  เส้นสัมผัสที่มีสมการเป็น  $x - 2y + 4 = 0$  จะ

สัมผัสกับเส้นโค้งดังกล่าวที่จุดใดต่อไปนี้

(ข้อ 1)

1.  $(2, 3)$       2.  $(-2, -3)$   
3.  $(2, 3)$  และ  $(-2, -3)$       4.  $(1, -3)$

วิธีทำ

69(มข 37) จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง  $y = x^3 + \frac{3}{x}$  ที่จุด  $(1, 4)$  ( $y = 4$ )

วิธีทำ

70(En 38) สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง  $y = \sqrt[3]{x^2 + 2}$  ที่จุด  $x = 5$  คือข้อใดต่อไปนี้

1.  $10x - 27y + 31 = 0$

2.  $5x - 13y + 14 = 0$

3.  $27x + 10y - 105 = 0$

4.  $13x - 5y - 50 = 0$

(ข้อ 1)

วิธีทำ

71. จงหาความชันเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง  $y = x^3 - 2x^2 + 4$  ที่จุด  $(2, 4)$

วิธีทำ

$(-1/4)$

72. กำหนดเส้นโค้งมีสมการเป็น  $y = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$  จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งตั้งฉาก

กับเส้นสัมผัสที่จุดสัมผัส (3, 25)

$$[ y - 25 = \frac{1}{37}(x - 3) ]$$

วิธีทำ

73. จงหาจำนวนจริง  $k$  ที่ทำให้เส้นตรงซึ่งผ่าน จุด  $(-1, 12)$  สัมผัสกราฟของ  $f(x) = k(x-2)^2$

ที่จุด  $(1, k)$

(2.4)

วิธีทำ

74(มข 45) ถ้าเส้นตรง  $x - 2y + 9 = 0$  สัมผัสเส้นโค้ง  $y = f(x)$  ที่จุด  $(1, 5)$  และ

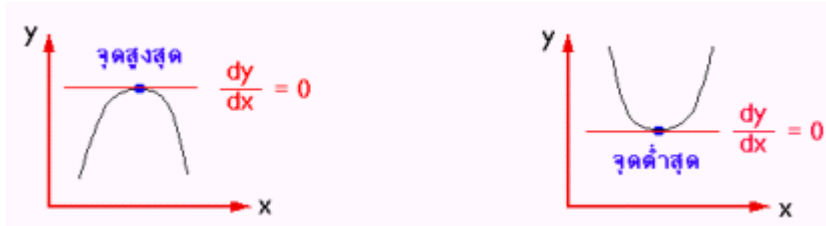
$$g(x) = \sqrt{x} \cdot f(x) \text{ แล้ว จงหา } g'(1)$$

(3)

วิธีทำ



**เพิ่มเติม** หากจุดใดๆ มีค่า  $\frac{dy}{dx} = 0$  ฟังก์ชันจะไม่เพิ่มไม่ลด เรียกจุดนั้นว่าเป็น จุดวิกฤติของฟังก์ชัน ซึ่งอาจเป็นจุดสูงสุด หรือจุดต่ำสุด ดังแสดงในภาพ และ ค่า  $x$  ณ.ที่จุดวิกฤติ เรียกว่า ค่าวิกฤติ (Critical Value)



76. กำหนด  $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 5$  จงพิจารณาว่าที่  $x = -2$  จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด (เพิ่ม)

วิธีทำ

77. กำหนด  $f(x) = 2x^4 + x - 6$  ที่  $x = -2$  ฟังก์ชันมีค่าอย่างไร (เพิ่มหรือลด) (ลด)

วิธีทำ

78. จงหาช่วงซึ่งทำให้ฟังก์ชันที่กำหนดแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และ ฟังก์ชันลด

1.  $y = 3 - 2x - x^2$

2.  $y = 2x^2 - 8x - 3$

3.  $y = x^3 - x^2 - 8x$

4.  $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 5$

{ 1. พ ( $\infty, -1$ ), ล ( $-1, \infty$ )

2. พ ( $2, \infty$ ), ล ( $\infty, 2$ )

3 พ ( $\infty, -4/3$ )  $\cup$  ( $2, \infty$ ) , ล ( $-4/3, 2$ )

4. พ ( $\infty, -3$ )  $\cup$  ( $2, \infty$ ) , ล ( $-3, 2$ ) }

วิธีทำ

## ตอนที่ 8 ค่าต่ำสุด และ ค่าสูงสุด

**บทนิยาม** ฟังก์ชัน  $f$  มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่  $x = c$  ถ้ามีช่วง  $(a, b) \subset D_f$  และ

$$c \in (a, b) \text{ โดยที่ } f(c) > f(x) \text{ สำหรับทุก } x \text{ ในช่วง } (a, b) \text{ ที่ } x \neq c$$

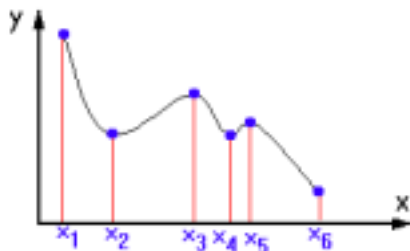
ฟังก์ชัน  $f$  มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่  $x = c$  ถ้ามีช่วง  $(a, b) \subset D_f$  และ

$$c \in (a, b) \text{ โดยที่ } f(c) < f(x) \text{ สำหรับทุก } x \text{ ในช่วง } (a, b) \text{ ที่ } x \neq c$$

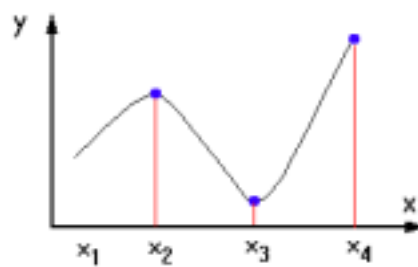
**บทนิยาม**

ฟังก์ชัน  $f$  มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่  $x = c$  ที่  $f(c) > f(x)$  สำหรับทุก  $x$  ในโดเมนของ  $f$  ที่  $x \neq c$

ฟังก์ชัน  $f$  มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่  $x = c$  ที่  $f(c) < f(x)$  สำหรับทุก  $x$  ในโดเมนของ  $f$  ที่  $x \neq c$



จากรูป 1  $f(x_2)$  และ  $f(x_4)$  เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์  
 $f(x_3)$  และ  $f(x_5)$  เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์  
 $f(x_1)$  เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์  
 $f(x_6)$  เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์



จากรูป 2  $f(x_2)$  เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์  
 $f(x_3)$  เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์  
 $f(x_4)$  เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์  
 $f(x_3)$  เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

### ขั้นตอนการหาจุดสูงสุดและต่ำสุดสัมพัทธ์

ขั้น 1 หา  $\frac{dy}{dx}$  ของฟังก์ชันเส้นโค้ง

ขั้น 2 กำหนดให้  $\frac{dy}{dx} = 0$  แล้วแก้สมการหาค่า  $x$

ขั้น 3 แทนค่า  $x$  ลงในฟังก์ชันเส้นโค้ง จะได้  $f(x)$  อันเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือ จุดเปลี่ยนเว้าเส้นโค้ง \*\*

### การตรวจสอบว่าเป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือ สูงสุดสัมพัทธ์

ขั้น 1 ให้หา  $f''(x)$  ของฟังก์ชันเส้นโค้ง

ขั้น 2 แทนค่า  $x$  ณ จุดนั้นๆ ลงใน  $f''(x)$

หาก  $f''(x) > 0$  จะเป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ เส้นโค้งหงาย



หาก  $f''(x) < 0$  จะเป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ เส้นโค้งคว่ำ



หาก  $f''(x) = 0$  ยังสรุปไม่ได้ ต้องตรวจสอบโดยใช้ฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด\*\*

#### การหาจุดสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์

ขั้น 1 หาจุดต่ำสุดและสูงสุดสัมพัทธ์จากจุดก่อน แล้วหาค่า  $f(x)$  ณ จุดนั้นๆ

ขั้น 2 หาค่า  $f(x)$  ณ จุดตรงปลายเส้นโค้ง

ขั้น 3 เปรียบเทียบคำตอบของขั้น 1 และขั้น 2

$f(x)$  สูงสุดจะเป็น ค่าสูงสุดสัมบูรณ์

$f(x)$  ต่ำสุดจะเป็น ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

79. จงหาค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ และ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน  $y = x^2 + 4x + 8$   $[4, (-2, 4)]$

วิธีทำ

80. จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และ จุดสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน  $y = -x^2 + 4x - 10$   $[-6, (2, -6)]$

วิธีทำ

81. กำหนดสมการเส้นโค้งเป็น  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$  ถ้า  $a$  และ  $b$  เป็นค่าสูงสุด  
สัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ตามลำดับแล้วค่าของ  $a + b$  ตรงกับข้อใด (ข้อ 1)

1. -12

2. -10

3. 2

4. 8

วิธีทำ

82(มข 42) ให้  $f = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{19}{6}$  จงหาผลบวกของค่าสูงสุดสัมพัทธ์กับค่าต่ำสุด  
สัมพัทธ์ของ  $f$  (8.5)

วิธีทำ

83(มข 33) จงหา  $x$  ที่ทำให้  $y = 12x - x^3$  มีค่าต่ำสุด (x = -2)

วิธีทำ

84(มข 37) ถ้า  $f(x) = 5x^3 - 3x^5$  แล้วจะได้ว่า

1.  $f$  มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่  $x = 0$  และมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่  $x = -1$
2.  $f$  มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่  $x = 1$  และมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่  $x = 0$
3.  $f$  มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่  $x = 1$  และมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่  $x = -1$
4.  $f$  มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่  $x = 0$  และไม่มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

(ข้อ 3)

วิธีทำ

85. กำหนด  $f(x) = x^5$  ข้อความใดถูกต้อง

1.  $f$  มีทั้งค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
2.  $f$  มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ แต่ไม่มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
3.  $f$  มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ แต่ไม่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์
4.  $f$  ไม่มีทั้งค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

(ข้อ 4)

วิธีทำ

86. ให้  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$  จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ  $f$  ในช่วง  $[-3, 4]$

วิธีทำ

(144, 0)

87. ให้  $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x - 1$  จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ  $f$  ในช่วง  $[-1, 2]$

วิธีทำ

(3, -4)

88. ต้นทุน (c) ในการผลิตสินค้า ชนิดหนึ่งจำนวน  $x$  หน่วย คือ

$$C = \frac{1600}{x} + 0.2x + 0.01x^2 \text{ จงหาจำนวนสินค้าที่ทำให้ต้นทุนมีค่าน้อยที่สุด} \quad (400)$$

วิธีทำ

89(มข 39) ให้  $H(t)$  เป็นความสูงของต้นไม้ (หน่วยเป็นนิ้ว) หลังจากที่ถูกปลูกได้  $t$  สัปดาห์ ซึ่ง

กำหนดโดย  $H(t) = 10\sqrt{t} - 2t$  เมื่อ  $0 \leq t \leq 20$  จงหาว่าต้นไม้ต้นนี้จะสูงที่สุดได้กี่นิ้ว (12.5)

วิธีทำ

**หลักการทั่วไป ของการทำโจทย์ประเภทหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด**

1. ให้กำหนดสิ่งที่มีการแปรเปลี่ยนในโจทย์เป็น  $x$
2. สิ่งที่มีค่ามากที่สุดหรือน้อยที่สุด ให้กำหนดเป็น  $y$
3. นำข้อมูลของโจทย์มาสร้างสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $y$  กับ  $x$  ให้ได้และสมการนี้ จะต้องมีแต่ตัวแปร  $x$  และ  $y$  เพียง 2 ตัวแปรเท่านั้น
4. หา  $\frac{dy}{dx}$  จากสมการในข้อ 3
5. ให้  $\frac{dy}{dx} = 0$  แก้สมการหาค่า  $x$
6. ค่า  $x$  ที่ได้ในข้อ 5 จะนำไปสู่การหาค่าตอบต่างๆ ของโจทย์

90. จงหาจำนวนจริงบวกสองจำนวน ซึ่งผลคูณของสองจำนวนเป็น 64 และผลบวกของสองจำนวนนี้มีค่ามากที่สุด (8,8)

วิธีทำ

91. ผลบวกของเลข 2 จำนวนรวมกันได้เท่ากับ 12 และ ถ้าผลคูณของเลข 2 จำนวนนั้นมีค่ามากที่สุด แล้วเลข 2 จำนวนนั้นจะมีค่าต่างกันเท่ากับข้อใด

1. 0

2. 1

3. 2

4. 3

(ข้อ 1)

วิธีทำ

92. มีเส้นลวดยาว 100 ม. จะนำไปล้อมสวนผัก

แม่น้ำ ต้องล้อมรั้วรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารอบสวนผัก  
ริมแม่น้ำให้มีขนาดเท่าใด ซึ่งจะทำให้สวนผักมี  
พื้นที่มากที่สุด โดยใช้แนวแม่น้ำเป็นด้านๆ หนึ่ง  
ของรั้ว (ถือว่าแนวแม่น้ำตรงที่จะล้อมรั้วเป็นเส้นตรง และไม่ต้องล้อมรั้ว ด้านนี้



วิธีทำ

( กว้าง 25 ม. , ยาว 5 ม. )

93(En 27) นายแดงต้องการจะกั้นรั้วรอบที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าไว้ปลูกส้ม โดยใช้รั้วบ้านเป็น รั้วด้านหนึ่งของที่ดินแปลงนี้ ถ้าเขามีลวดหนามยาว 400 เมตร และต้องการปลูกส้มหนึ่งต้น ต่อที่ดินทุกๆ 5 ตารางเมตร เขาจะปลูกส้มได้มากที่สุดกี่ต้น (ข้อ 3)

1. 100

2. 200

3. 4000

4. 2000

วิธีทำ

94. มีเชือกยาว 100 เมตร ต้องการล้อมรั้วให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ที่มีพื้นที่มากที่สุดแล้ว จะต้องล้อมให้ด้านกว้าง กว้างด้านละเท่าใด

1. 20

2. 25

3. 30

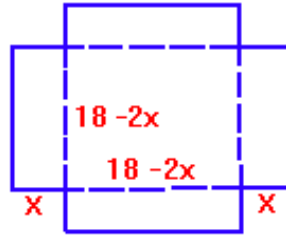
4. 40

(ข้อ 2)

วิธีทำ

95. จงหาปริมาตรที่มากที่สุดของกล่องฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่สร้างจากกระดาษรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งมีด้านยาว 18 นิ้ว โดยการตัดมุมทั้ง 4 ออกเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสเท่าๆ กัน และพับขึ้นเป็นกล่อง

1. 430 ลบ. น
2. 432 ลบ. น
3. 433 ลบ. น
4. 444 ลบ. น



(ข้อ 2)

วิธีทำ

- 96(En 38) สินค้าชนิดหนึ่งขายในราคาชิ้นละ 24 บาท ต้นทุนในการผลิต  $x$  ชิ้นเท่ากับ  $16 + 6x + 0.2x^{3/2}$  ถ้า  $N$  เป็นจำนวนชิ้นของสินค้าที่ผลิตเพื่อให้ได้กำไรสูงสุดแล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1.  $1 \leq N < 2000$
2.  $2000 \leq N < 4000$
3.  $4000 \leq N < 6000$
4.  $6000 \leq N < 8000$

(ข้อ 2)

วิธีทำ



### ตอนที่ 9 อินทิกรัลไม่จำกัดเขต

การอินทิเกรต คือ การกระทำตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน  
ผลลัพธ์ที่ได้จากการอินทิเกรต เรียก ปฏิยานุพันธ์ (Antiderivative)

**นิยาม** ฟังก์ชัน  $F$  เป็นปฏิยานุพันธ์ของ  $f$  เมื่อ  $F'(x) = f(x)$   
สำหรับทุกค่าของ  $x$  ที่อยู่ในโดเมนของ  $f$

**ตัวอย่างเช่น**  $\frac{dy}{dx} = 10x - 7$

$$y = (10x - 7) dx$$

อ่านว่า “อินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ  $10x - 7$  เทียบกับ  $x$ ”

#### สูตรสำหรับการอินทิเกรต

**สูตร 1**  $x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$  เมื่อ  $C$  คือค่าคงตัว

99. จงหาค่าต่อไปนี้

1.  $x^3 dx = \dots\dots\dots \left(\frac{x^4}{4} + C\right)$
2.  $x^{-5} dx = \dots\dots\dots \left(\frac{x^{-4}}{-4} + C\right)$
3.  $x^7 dx = \dots\dots\dots \left(\frac{x^8}{8} + C\right)$
4.  $x^9 dx = \dots\dots\dots \left(\frac{x^{10}}{10} + C\right)$
5.  $\frac{1}{x} dx = \dots\dots\dots \left(\frac{x^{-3}}{-3} + C\right)$

**สูตร 2**  $k f(x) dx = k \int f(x) dx + C$  เมื่อ  $k, C$  คือค่าคงตัว

100. จงหาค่าต่อไปนี้

1.  $6x^2 dx = \dots\dots\dots (2x^3 + C)$
2.  $7x dx = \dots\dots\dots \left(7 \frac{x^2}{2} + C\right)$

$$3. \quad \frac{4}{3}x^3 dx = \dots\dots\dots \left( \frac{1}{3}x^4 + C \right)$$

$$4. \quad 8x^3 dx = \dots\dots\dots (2x^4 + C)$$

$$5. \quad 20x^4 dx = \dots\dots\dots (4x^5 + C)$$

สูตร 3  $\int dx = x + C$  เมื่อ  $C$  คือค่าคงตัว

### 101. จงหาค่าต่อไปนี้

$$1. \quad \int 6 dx = \dots\dots\dots (6x+C)$$

$$2. \quad \int -7 dx = \dots\dots\dots (-7x+C)$$

สูตร 4  $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

### 102. จงหาค่า

$$1. \quad \int (6x^2 - 4x + 9) dx = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots (2x^3 - 2x^2 + 9x + C)$$

$$2. \quad \int (4x^3 - 6x^2 + 8x - 7 - 6x^{-3} + 9x^{-4}) dx$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots (x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 7x + 3x^{-2} - 3x^{-3} + C)$$

### 103. จงหา

$$1. \quad \int (x^4 + 3x^2 + 5x) dx \quad \left( \frac{x^5}{5} + \frac{3x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + C \right)$$

$$2. \quad \int (2x^3 - 3x^2 + 6 - 2x^{-2}) dx \quad \left( \frac{x^4}{2} - x^3 + 6x + 2x^{-1} + C \right)$$

### วิธีทำ

104. จงหา

1.  $(x^{10} - \frac{1}{x^3})dx$   $(\frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{-2}}{2} + c)$

2.  $(\frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x^4})dx$   $(\frac{-1}{x} - \frac{2}{3x^3} + c)$

วิธีทำ105. จงหา  $\sqrt{x} dx$ 

$(\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + c)$

วิธีทำ106. จงหา  $(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{2}{3}})dx$ 

$(2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5} - 3\frac{x^{\frac{5}{3}}}{5} + c)$

วิธีทำ107. จงหา  $(\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}})dx$ 

$(\frac{-1}{x} + \sqrt{x} + c)$

วิธีทำ108. จงหา  $x^2(x-3)dx$ 

$(\frac{x^4}{4} - x^3 + c)$

วิธีทำ

109. จงหา  $\int \sqrt{x}(x+1) dx$   $(\frac{5}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{3}x^{\frac{3}{2}} + c)$

วิธีทำ

110. จงหา  $\int (\frac{x-2}{x^3})dx$   $(\frac{1}{2}x^{-2} - \frac{1}{x} + c)$

วิธีทำ

111. จงหา  $\int (2t-1)^2 dt$   $(\frac{4t^3}{3} - 2t^2 + t + c)$

วิธีทำ

112. จงหาแก้สมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้  $\frac{dy}{dx} = 10x - 7$   $(y = 5x^2 - 7x + C)$

วิธีทำ

โปรดสังเกต	$\frac{dy}{dx}$	อินทิเกรตได้	$y$
ดังนั้น	$f'(x)$	อินทิเกรตได้	$f(x)$
	$f''(x)$	อินทิเกรตได้	$f'(x)$

113. จงหาสมการเส้นโค้ง  $y = f(x)$  เมื่อกำหนดความชันของเส้นตรงสัมผัสเส้นโค้งที่จุด  $(x, y)$  ใดๆ ที่เส้นโค้งผ่านดังนี้  $\frac{dy}{dx} = x^2 - 3x + 2$  และ เส้นโค้งผ่านจุด  $(2, 1)$

วิธีทำ  $(y = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + \frac{1}{3})$

114. จงหาสมการเส้นโค้ง  $y = f(x)$  เมื่อกำหนดความชันของเส้นตรงสัมผัสเส้นโค้งที่จุด  $(x, y)$

ใดๆ ที่เส้นโค้งผ่านดังนี้  $\frac{dy}{dx} = 2x^3 + 4x$  และเส้นโค้งผ่านจุด  $(0, 5)$

วิธีทำ

$$(y = \frac{x^4}{2} + 2x^2 + 5)$$

115. ถ้า  $f'(x) = 4x^3 + 2x$  และ  $f(0) = 2$  จงหา  $f(x)$

$$(x^4 + x^2 + 2)$$

วิธีทำ

116. ถ้า  $f'(x) = 3x^2 - \frac{4}{x^2} - 2$  และ  $f(2) = 8$  จงหา  $f(x)$

$$(x^3 + \frac{4}{x} - 2x + 2)$$

วิธีทำ

117(En 35) ให้  $y = f(x)$  ถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลงของ  $y$  เทียบกับ  $x$  เท่ากับ  $Kx^3 - 10x + 6$  เมื่อ  $x$  มีค่าใดๆ และ  $K$  เป็นค่าคงตัว และ  $f(0) = 1$  ,  $f'(1) = 0$  แล้ว  $f(-1)$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 6                      2. -9                      3. 10                      4. -13                      (ข้อ 2)

วิธีทำ

118(En 41/2) กำหนดให้  $f$  เป็นฟังก์ชันซึ่ง  $f(2) = -1$  ,  $f'(1) = -3$  และ  $f''(x) = 3$  ทุกค่า  $x$  แล้ว  $f(0)$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 5                      2. 6                      3. 12                      4. 15                      (ข้อ 1)

วิธีทำ

119(En 41) ถ้า  $\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 3x^2 - 4x$  และ  $-y(1) = y(-1)$  แล้ว

ค่าของ  $y(0)$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0                      2. 1                      3. 2                      4. 3                      (ข้อ 3)

วิธีทำ

120. สมการเส้นโค้งที่ผ่านจุด  $(-1, 3)$  โดยความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด  $(x, y)$  ใด ๆ

มีค่าเท่ากับ  $3x^2 - 5x - 4$  มีสมการเป็นเช่นใด

1.  $f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 5$                       2.  $f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 4x + \frac{5}{2}$   
 3.  $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 1$                       4.  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 9$                       (ข้อ 2)

วิธีทำ

121(มข 38) ถ้าความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด  $(x, y)$  ใด ๆ เป็น  $(x + \frac{1}{x})^2$  แล้ว  
สมการของเส้นโค้งที่ผ่านจุด  $(1, 0)$  คือข้อใด

1.  $y = 2x - \frac{2}{x^3}$

2.  $y = 2x + \frac{2}{x^3} - 4$

3.  $y = \frac{x^3}{3} + 2x + \frac{1}{x} - \frac{10}{3}$

4.  $y = \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} - \frac{4}{3}$  (ข้อ 4)

วิธีทำ

122(En 34) ถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นโค้ง  $y = f(x)$  ณ จุดใด ๆ มีค่า  
เป็น  $x - 1$  และเส้นโค้งมีความชันเป็น 1 ณ จุด  $(-1, 0)$  แล้วสมการของเส้นโค้งนี้ คือข้อใด

1.  $y = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}$

2.  $y = \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2}$

3.  $y = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{6}$

4.  $y = x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} - \frac{13}{6}$  (ข้อ 3)

วิธีทำ

123(En 40) ถ้าเส้นโค้ง  $y = f(x)$  มีอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันที่จุด  $(x, y)$  ใด ๆ บนเส้นโค้งเป็น  $2x - 1$  และเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด  $(1, 2)$  ตั้งฉากกับเส้นตรง  $x + 2y - 1 = 0$  แล้ว ความชันของเส้นโค้งที่จุด  $x = 0$  เท่ากับ ข้อใดต่อไปนี้

1.  $-2$                       2.  $0$                       3.  $1$                       4.  $2$                       (ข้อ 4)

วิธีทำ

124. อนุภาคชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่จากจุด ๆ หนึ่ง เมื่อ เวลาผ่านไป  $t$  วินาที ด้วยความเร็ว  $v = 4t^3 + 2t - 1$  เมตรต่อวินาที ขณะเริ่มต้นจับเวลา ระยะทางเป็น 4 เมตร จงหาระยะทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ไปได้ในวินาทีที่ 3 (ข้อ 3)

1. 83 เมตร                      2. 87 เมตร                      3. 91 เมตร                      4. 97 เมตร

วิธีทำ



### ตอนที่ 10 อินทิกรัลจำกัดเขต

อินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชัน  $f$  บนช่วง  $[a, b]$

$$\text{เขียนแทนด้วย } \int_a^b f(x) dx$$

อ่านว่า “ อินทิกรัลจำกัดเขตของ  $f$  จาก  $x=a$  ถึง  $x=b$  ”

#### ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส

ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $[a, b]$   $F(x)$  เป็นผลที่ได้จากการอินทิเกรต  $f(x)$  แล้ว

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

127. จงหาค่า  $\int_1^4 3x^2 dx$  (63)

วิธีทำ

128. จงหาค่าของ  $\int_2^4 x^3 dx$  (60)

วิธีทำ

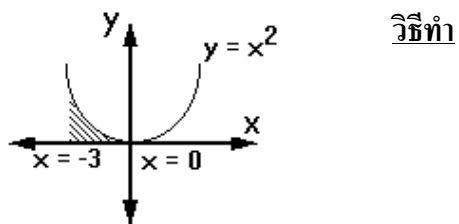
129(En 40) ถ้า  $\int_1^{\sin \theta} x^2 dx = -\frac{2}{3}$  แล้ว  $1 + \sin \theta + \cos \theta$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (ข้อ 3)

1. 2                                      2. 1                                      3. 0                                      4. -1

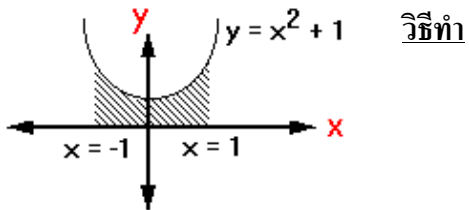
วิธีทำ



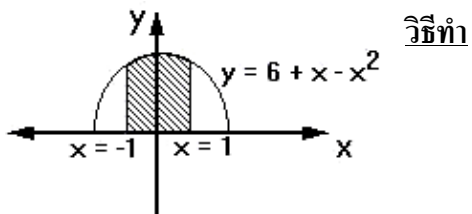
131. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งในรูปภาพ (9)



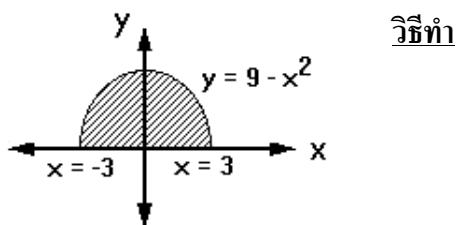
132. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งในรูปภาพ ( $\frac{8}{3}$ )



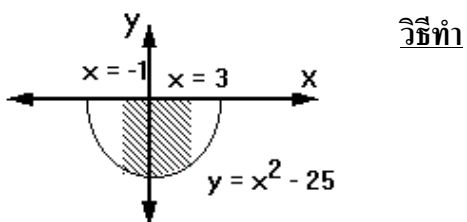
133. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งในรูปภาพ ( $\frac{34}{3}$ )



134. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งในรูปภาพ (54)



135. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งในรูปภาพ ( $\frac{272}{3}$ )

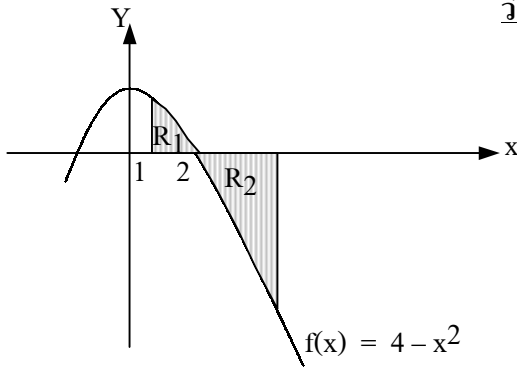


136. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ล้อมรอบโดยกราฟของ

(  $\frac{86}{3}$  )

$f(x) = 4 - x^2$  ,  $x = 1$  ,  $x = 5$  และแกน x

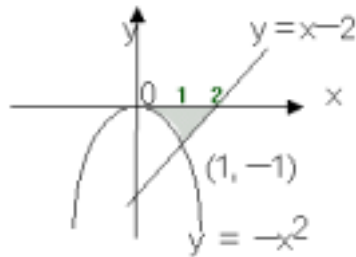
วิธีทำ



137(มข 37) จงหาพื้นที่ของบริเวณส่วนที่แรเงาในรูป

(  $\frac{5}{6}$  )

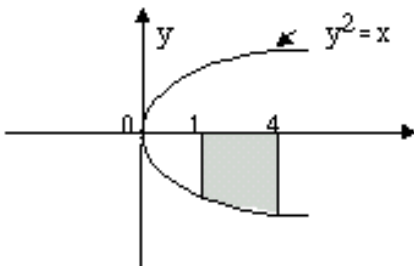
วิธีทำ



138(มข 38) จงหาพื้นที่ของบริเวณส่วนที่แรเงาในรูป

(  $\frac{14}{3}$  )

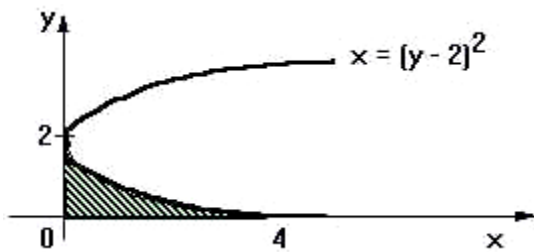
วิธีทำ



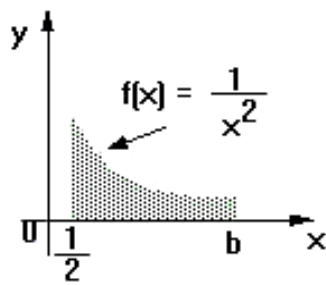
139(มข 41) จงหาพื้นที่ของบริเวณส่วนที่แรเงาในรูปต่อไปนี้

(  $\frac{8}{3}$  )

วิธีทำ



140(มข 39) กำหนดให้พื้นที่ส่วนที่แรเงาในรูปเท่ากับ  $\frac{7}{4}$  ตารางหน่วย จงหาค่า  $b$  (4)

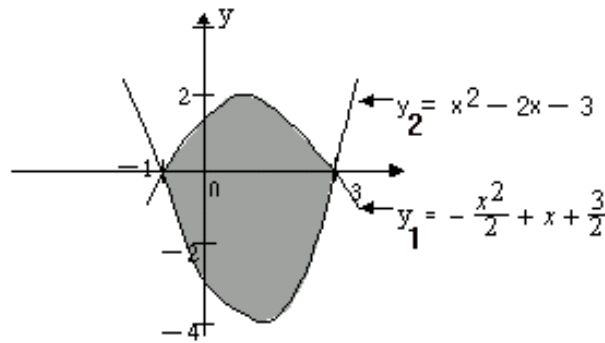


วิธีทำ

ให้  $f$  และ  $g$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $[a, b]$  และ  $f(x) \geq g(x)$  สำหรับทุก  $x \in [a, b]$  และ  $A$  คือพื้นที่ ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง  $f$  และ  $g$  จาก  $x = a$  ถึง  $x = b$  แล้วจะได้

$$A = \int_a^b [ f(x) - g(x) ] dx$$

141(มข 42) จงหาพื้นที่ของบริเวณส่วนที่แรเงาในรูปต่อไปนี้ (16 ตารางหน่วย)



วิธีทำ

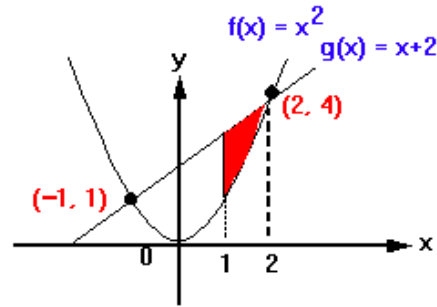
142. พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง  $f(x) = x^2$  และ

เส้นตรง  $g(x) = x + 2$  จาก  $x = 1$  ถึง

$x = 2$  มีค่าเท่ากับกี่ตารางหน่วย (ข้อ 2)

- |                  |                  |
|------------------|------------------|
| 1. $\frac{8}{6}$ | 2. $\frac{7}{6}$ |
| 3. $\frac{5}{6}$ | 4. $\frac{4}{6}$ |

วิธีทำ



143. พื้นที่ ที่ปิดล้อมด้วยกราฟ  $y = f(x) = 2 - x^2$

กับกราฟ  $y = g(x) = -x$  มีพื้นที่เท่ากับค่าใน

ข้อใด (หน่วย : ตารางหน่วย) (ข้อ 3)

- |                   |                   |
|-------------------|-------------------|
| 1. $\frac{13}{2}$ | 2. $\frac{11}{2}$ |
| 3. $\frac{9}{2}$  | 4. $\frac{7}{2}$  |

วิธีทำ

