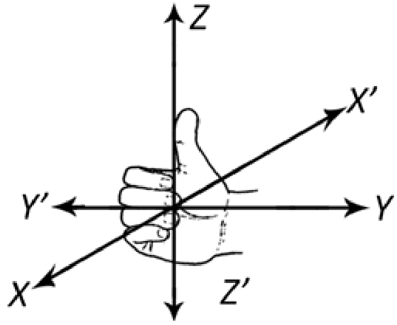
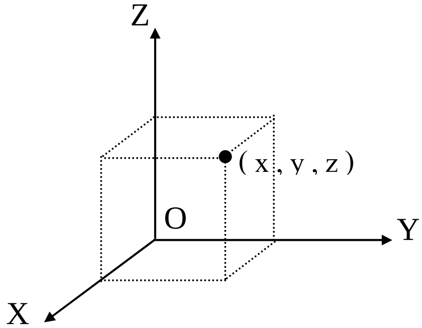
คณิตศาสตร์ บทที่ 9 เวกเตอร์ในสามมิติ

ตอนที่ 1 ระบบพิกัดฉากสามมิติ



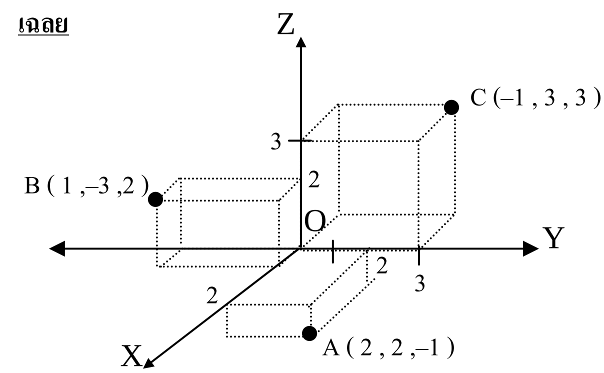


รูปภาพด้านบนนี้เป็นรูปแสดงพิกัดฉากสามมิติตามกฎมือขวา

จุด (x , y , z) คือ จุดซึ่งอยู่ห่างจากจุด O มาตามแนวแกน x เท่ากับ x หน่วย
และ อยู่ห่างจากจุด O มาตามแนวแกน y เท่ากับ y หน่วย
และ อยู่ห่างจากจุด O มาตามแนวแกน z เท่ากับ z หน่วย

1. จงเขียนจุด A (2 , 2 , –1) B (1 , –3 , 2) C (–1 , 3 , 3) ลงในระบบพิกัดฉากสามมิติ

วิธีทำ



การหาระยะระหว่างจุด 2 จุด บนพิกัดสามมิติ

หากจุด (x_1 , y_1 , z_1) และ (x_2 , y_2 , z_2) เป็นจุดซึ่งอยู่บนพิกัด 3 มิติ ระยะห่างระหว่างจุดทั้งสองสามารถหาค่าได้จากสมการ

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

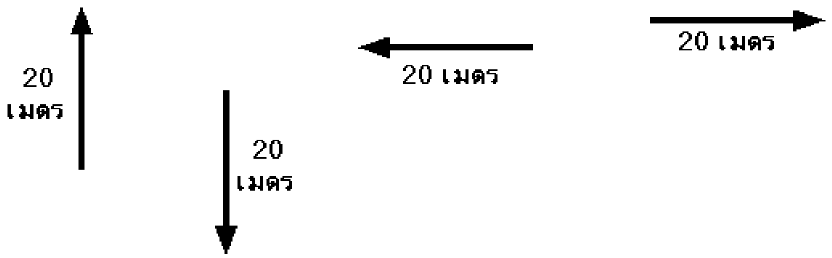
เมื่อ d คือ ระยะห่างระหว่างจุดทั้งสองนั้น

2. จงหาระยะทางระหว่างจุด A (1 , 0 , 3) และ B (–1 , 3 , 2) ($\sqrt{14}$)

<u>วิธีทำ</u>

ตอนที่ 2 สัญลักษณ์แทนเวกเตอร์ การบวกเวกเตอร์ การลบเวกเตอร์ และ การคูณด้วยสเกลลาร์

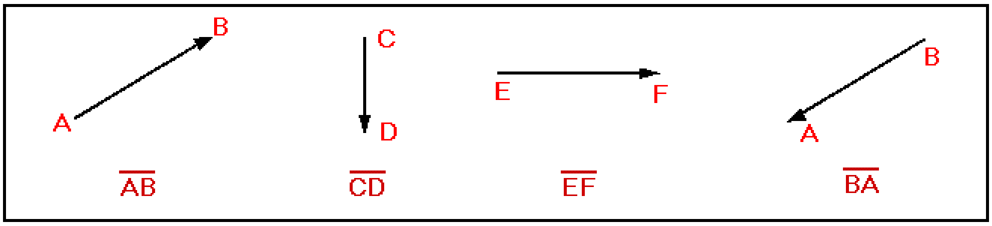
@ ปริมาณเวกเตอร์ คือ ปริมาณที่ต้องบอกทั้งขนาด และทิศทางจึงจะสมบูรณ์

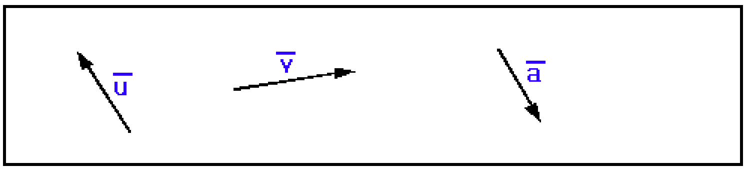


@ ปริมาณสเกลลาร์ คือ ปริมาณที่บอกขนาดเพียงอย่างเดียวก็สมบูรณ์ได้

3. ข้อแตกต่างของเวกเตอร์กับสเกลาร์ คือ ....

<u>สัญลักษณ์แทนเวกเตอร์</u>



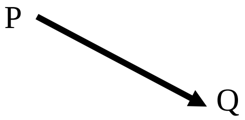


$|\overline{AB}|$ คือ ความยาวของเวกเตอร์ AB

$|\overline{u}|$ คือ ความยาวของเวกเตอร์ u

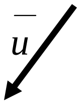
เวกเตอร์ศูนย์ (Zero Vector) คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ 0 เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overline{0}$

4. จงให้ความหมายของสัญญลักษณ์ต่อไปนี้

1) 

$\overline{PQ}$ คือ ....

$|\overline{PQ}|$ คือ ....

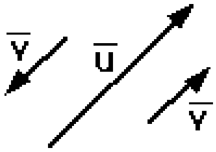
2) 

$\bar{u}$ คือ ....

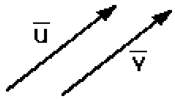
$|\bar{u}|$ คือ ....

<u>นิยามเบื้องต้นของเวกเตอร์</u>

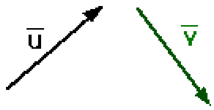
<u>นิยาม 1</u> $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ จะขนานกันก็ต่อเมื่อ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีทิศเดียวกัน หรือ ตรงกันข้าม



<u>นิยาม 2</u> $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ จะเท่ากันก็ต่อเมื่อเวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากัน และ มีทิศทางเดียวกัน

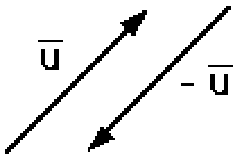


$\bar{u} = \bar{v}$



$\bar{u} \neq \bar{v}$

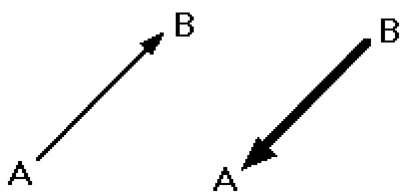
<u>นิยาม 3</u> นิเสธของ $\bar{u}$ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ $\bar{u}$ แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับขนาดของ $\bar{u}$ เขียนแทนด้วย $-\bar{u}$



<u>โปรดสังเกตุ</u>

1) $\bar{u}$ จะขนานกับ $-\bar{u}$ เสมอ

2) $\bar{u} \neq -\bar{u}$ ยกเว้น $\bar{u} = \bar{0}$ จะได้ว่า $\bar{u} = -\bar{u}$ ได้

3) 

$-\overline{AB} = \overline{BA}$

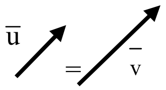
$-\overline{DC} = \overline{CD}$

$\overline{PQ} = -\overline{QP}$

$\overline{ST} = -\overline{TS}$

5. $\bar{u}$ จะขนานกับ $\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ ....

6. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

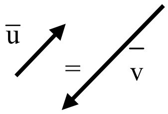
……..(1) 

……..(2) ถ้า $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$ แล้ว $\bar{u} = \bar{v}$

……..(3) ถ้า $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$ แล้ว $|\bar{u}| = |\bar{v}|$

……..(4) ถ้า $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$ แล้ว $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีทิศทางเดียวกัน

……..(5) ถ้า $|\bar{u}| = |\bar{v}|$ แล้ว $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$

……..(6) 

<u>**ตอบ**</u> **1.** ✗ **2.** ✗ **3.** ✗ **4.** ✗ **5.** ✗ **6.** ✗

7. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

……..(1) $\bar{u}$ ขนานกับ $-\bar{u}$

……..(2) ถ้า $\bar{u} = -\bar{u}$ แล้ว $\bar{u} = \bar{0}$

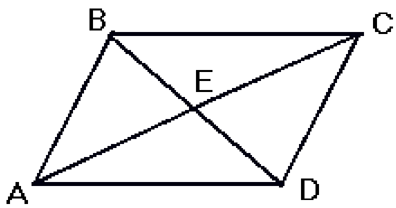
……..(3) ถ้า $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$ แล้ว $\bar{u} = \bar{v}$ หรือ $\bar{u} = (-\bar{v})$

<u>**ตอบ**</u> **1.** ✓ **2.** ✓ **3.** ✗

8. ให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังรูป
จงหาเวกเตอร์ที่เท่ากับเวกเตอร์ที่ให้ ต่อไปนี้

(1) $\overline{AB}$ (2) $\overline{BC}$ (3) $\overline{AE}$

(4) $\overline{ED}$ (5) $-\overline{BC}$ (6) $-\overline{AE}$



<u>**วิธีทำ**</u>

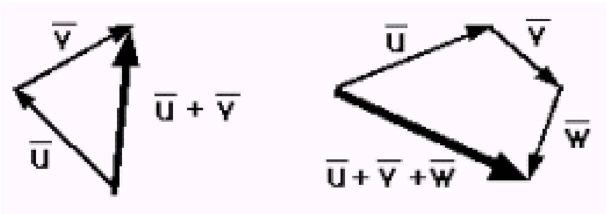
<u>**ตอบ**</u>

(1)	$\overline{AB}$	=	$-\overline{BA}$	=	$\overline{DC}$	=	$-\overline{CD}$
(2)	$\overline{BC}$	=	$-\overline{CB}$	=	$\overline{AD}$	=	$-\overline{DA}$
(3)	$\overline{AE}$	=	$-\overline{EA}$	=	$\overline{EC}$	=	$-\overline{CE}$
(4)	$\overline{ED}$	=	$-\overline{DE}$	=	$\overline{BE}$	=	$-\overline{EB}$
(5)	$-\overline{BC}$	=	$\overline{CB}$	=	$\overline{DA}$	=	$-\overline{AD}$
(6)	$-\overline{AE}$	=	$\overline{EA}$	=	$\overline{CE}$	=	$-\overline{EC}$

การบวกเวกเตอร์

นิยาม ถ้าจุดปลายของ $\bar{u}$ เป็นจุดเดียวกับจุดตั้งต้นของ $\bar{v}$ แล้ว $\bar{u}+\bar{v}$ คือ เวกเตอร์ซึ่งมีจุดตั้งต้นเป็นจุดเดียวกับจุดตั้งต้นของ $\bar{u}$ และมีจุดสิ้นสุดเป็นจุดจุดเดียวกับจุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$

ตัวอย่าง



คุณสมบัติของการบวกเวกเตอร์

ให้ $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระนาบ แล้ว

(1) $\bar{u}+\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบเดียวกับ $\bar{u}$, $\bar{v}$

(2) $\bar{u}+\bar{v} = \bar{v}+\bar{u}$

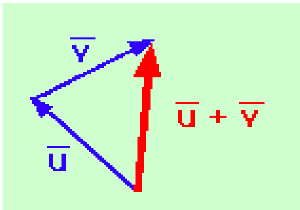
(3) $(\bar{u}+\bar{v})+\bar{w} = \bar{u}+(\bar{v}+\bar{w})$

(4) $\bar{0}+\bar{u} = \bar{u}$ และ $\bar{u}+\bar{0} = \bar{u}$

(5) $\bar{u}+(-\bar{u}) = \bar{0}$ และ $(-\bar{u})+\bar{u} = \bar{0}$

(6) ถ้า $\bar{u} = \bar{v}$ แล้วจะได้ $\bar{u}+\bar{w} = \bar{v}+\bar{w}$

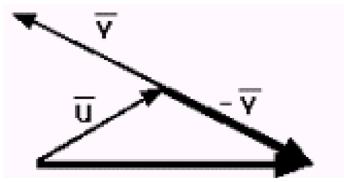
(7) $\bar{u} \pm k$ ไม่มีความหมาย เมื่อ k เป็นสเกลลาร์ เช่น $\bar{u}+8$ ไม่มีความหมาย



การลบเวกเตอร์

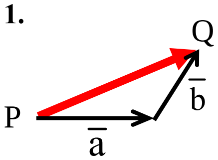
นิยาม ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระนาบ ผลลบของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เขียนแทนด้วย $\bar{u}-\bar{v}$ และ $\bar{u}+(-\bar{v})$

จะเห็นว่าการลบ ก็คือ การบวกด้วยนิเสธนั่นเอง



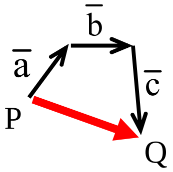
9. จงเขียนเวกเตอร์ PQ ให้อยู่ในรูปผลบวก ลบ ของเวกเตอร์ $\bar{a}$, $\bar{b}$ หรือ $\bar{c}$

1.



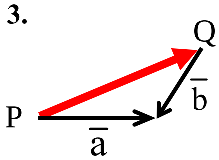
$\overline{PQ}$ =................

2.



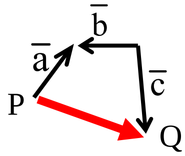
$\overline{PQ}$ =................

3.



$\overline{PQ}$ =................

4.



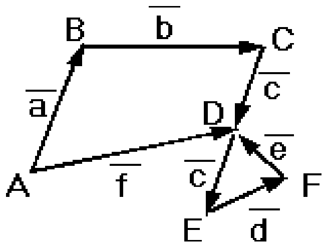
$\overline{PQ}$ =................

ตอบ 1) $\bar{a}+\bar{b}$ 2) $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ 3) $\bar{a}-\bar{b}$ 4) $\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}$

10. จากรูปจงเขียนเวกเตอร์

$\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{CA}$, $\overline{DB}$, $\overline{AF}$, $\overline{FA}$, $\overline{AE}$ และ $\overline{EA}$

ในรูปของเวกเตอร์ $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$, $\bar{e}$ หรือ $\bar{f}$



วิธีทำ

ตอบ $\overline{AB} = \bar{a}$

$\overline{BD} = \bar{b} + \bar{c} = -\bar{a} + \bar{f}$

$\overline{CA} = \bar{c} - \bar{f} = -\bar{b} - \bar{a}$

$\overline{DB} = -\bar{c} - \bar{b} = -\bar{f} + \bar{a}$

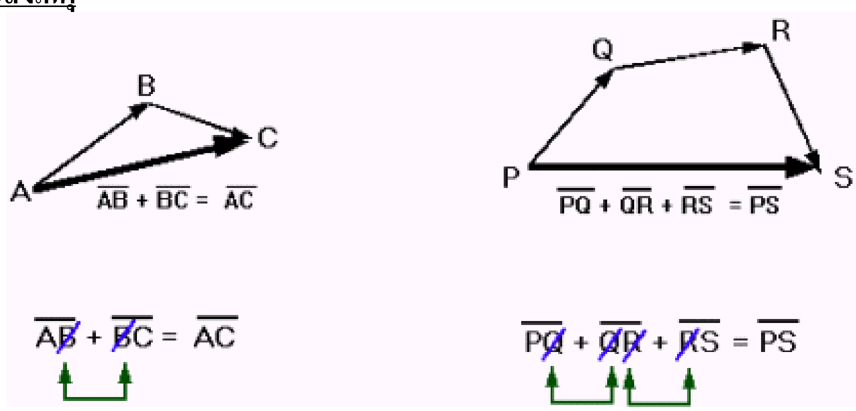
$\overline{AF} = \bar{f} - \bar{e} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} - \bar{e} = \bar{f} + \bar{c} + \bar{d}$

$\overline{FA} = \bar{e} - \bar{f} = \bar{e} - \bar{c} - \bar{b} - \bar{a} = -\bar{f} - \bar{c} - \bar{d}$

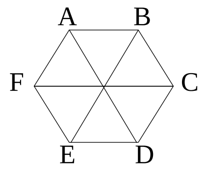
$\overline{AE} = \bar{f} + \bar{c} = \bar{a} + \bar{b} + \overline{2c} = \bar{f} - \bar{e} - \bar{d}$

$\overline{EA} = -\bar{c} - \bar{f} = \bar{d} + \bar{e} + \bar{f} = -\overline{2c} - \bar{b} - \bar{a} = \bar{d} + \bar{e} - \bar{c} - \bar{b} - \bar{a}$

ข้อสังเกตุ



11. จากรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ข้อใดต่อไปนี้ **<u>ไม่</u>** ถูกต้อง



1. $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$
2. $\overline{AE} + \overline{ED} = \overline{AB} + \overline{BD}$
3. $\overline{AF} + \overline{FE} + \overline{ED} = \overline{AC} + \overline{CD}$
4. $\overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DE} = \overline{AF} + \overline{FD}$ **(ข้อ 4)**

<u>วิธีทำ</u>

12. กำหนดจุด A , B , C , D , E และ F บนระนาบ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $\overline{DC} + \overline{BA} + \overline{CB} + \overline{AD} = \bar{0}$

(ข) $\overline{AB} + \overline{DE} + \overline{BC} + \overline{EF} + \overline{CA} + \overline{FD} = \bar{0}$

(ค) $\overline{AB} - \overline{DC} + \overline{BC} - \overline{FE} + \overline{DE} - \overline{AF} \neq \bar{0}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

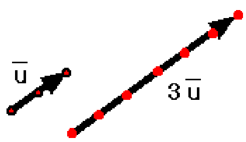
1. ข้อความ (ก) – (ค) ถูกเพียง 1 ข้อ
2. ข้อความ (ก) – (ค) ถูกเพียง 2 ข้อ
3. ข้อความ (ก) – (ค) ถูกทุกข้อ
4. ข้อความ (ก) – (ค) ผิดทุกข้อ **(ข้อ 2)**

<u>วิธีทำ</u>

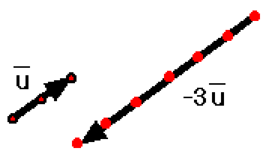
<u>การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลลาร์</u>

<u>นิยาม</u> ให้ a เป็นจำนวนจริงและ $\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ ผลคูณระหว่าง a และ $\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่เขียนแทนด้วย a $\bar{u}$

โดยที่ 1) ถ้า $a > 0$ แล้ว a $\bar{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $a|\bar{u}|$ และมีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$



2) ถ้า $a < 0$ แล้ว a $\bar{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $|a||\bar{u}|$ และมีทิศตรงกันข้ามกับ $\bar{u}$



3) ถ้า $a = 0$ แล้ว a $\bar{u} = \bar{0}$

คุณสมบัติของการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ a และ b เป็นจำนวนจริง แล้ว

(1) $a\,\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์

(2) $a(b\,\bar{u}) = (ab)\,\bar{u} = b(a\,\bar{u})$

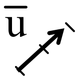
(3) $(a+b)\,\bar{u} = a\bar{u} + b\bar{u}$

(4) $a(\bar{u} + \bar{v}) = a\bar{u} + a\bar{v}$

(5) $1\bar{u} = \bar{u}$

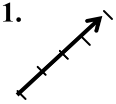
13. กำหนด เป็นดังรูป

จงหาเวกเตอร์ต่อไปนี้

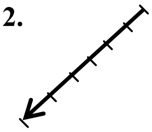


1. $2\bar{u}$ 2. $-3\bar{u}$ 3. $0\bar{u}$

ตอบ **1.**



2.

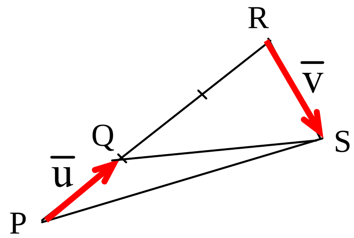


3. $\bar{0}$

14. จากรูปจงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ ให้อยู่ใน

รูป $\bar{u}$ หรือ $\bar{v}$ กำหนด $\overline{PR} = 3\bar{u}$

1. $\overline{QR}$ 2. $\overline{PS}$ 3. $\overline{SQ}$



วิธีทำ

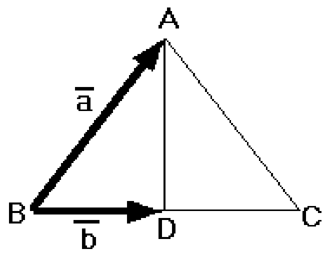
ตอบ **1.** $2\bar{u}$ **2.** $3\bar{u} + \bar{v}$ **3.** $-\bar{v} - 2\bar{u}$

15. ในรูป ΔABC เส้น AD เป็นเส้นมัธยฐาน $\overline{BA} = \bar{a}$

และ $\overline{BD} = \bar{b}$ จงหาว่า $\overline{CA}$ คือข้อใด

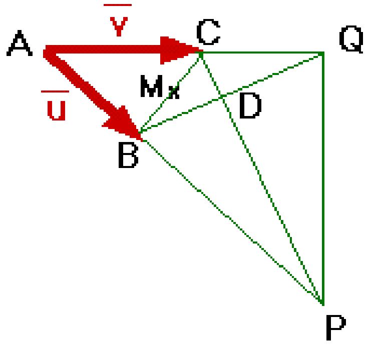
1. $\bar{a}$ 2. $\bar{a} - \bar{b}$

3. $\bar{a} - 2\bar{b}$ 4. $\bar{a} + 2\bar{b}$ **(ข้อ 3)**



วิธีทำ

16. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ซึ่งมี $\overline{AB} = \overline{u}$ และ $\overline{AC} = \overline{v}$ P และ Q เป็นจุด ซึ่งทำให้ $\overline{AP} = 3\overline{u}$ และ $\overline{AQ} = 2\overline{v}$ จงเขียนเวกเตอร์ที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ในรูปของ $\overline{u}$ และ $\overline{v}$



(1) $\overline{BC}$ (2) $\overline{PB}$

(3) $\overline{PQ}$ (4) $\overline{PC}$

(5) $\overline{BD} + \overline{DC} + \overline{CQ}$

(6) $\overline{AM}$, M เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC

__วิธีทำ__

__ตอบ__ 1) $\overline{BC} = -\overline{u} + \overline{v}$

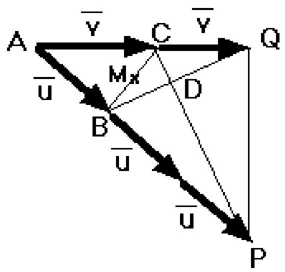
2) $\overline{PB} = -2\overline{u}$

3) $\overline{PQ} = -3\overline{u} + 2\overline{v}$

4) $\overline{PC} = -3\overline{u} + \overline{v}$

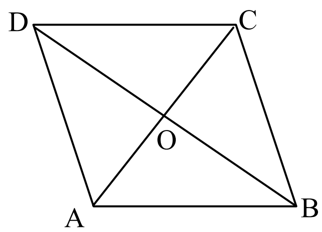
5) $\overline{BD} + \overline{DC} + \overline{CQ} = \overline{BQ} = -\overline{u} + 2\overline{v}$

6) $\overline{AM} = \frac{\overline{v}}{2} + \frac{\overline{u}}{2}$



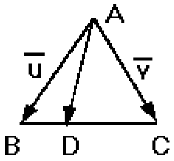
17. จากรูป ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน O เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุม BD ถ้า $\overrightarrow{AB} = \overline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \overline{v}$ จงเขียนเวกเตอร์ $\overrightarrow{AO}$ และ $\overrightarrow{BO}$ ในรูป $\overline{u}$ และ $\overline{v}$

($\overline{\mathbf{AO}} = \frac{1}{2}(\overline{u} + \overline{v})$, $\overline{\mathbf{BO}} = \frac{1}{2}(\overline{v} - \overline{u})$)



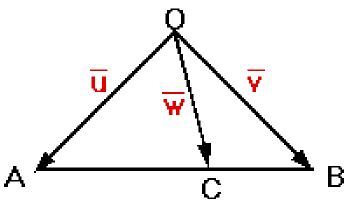
__วิธีทำ__

18. จากรูป $|\overline{BD}| : |\overline{DC}| = 1 : 2$ จงเขียน $\overline{AD}$ ในเทอมของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ $\left(\frac{2}{3}\bar{u}+\frac{1}{3}\bar{v}\right)$



วิธีทำ

19. จงหา $\bar{w}$ ในรูปของ $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ เมื่อกำหนดให้ C เป็นจุดบน AB และ C อยู่ห่างจากจุด A เป็นระยะทาง $\frac{2}{3}$ ของระยะ AB

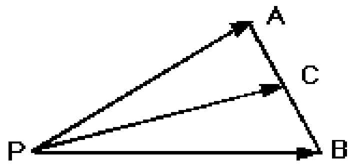


1. $\bar{w} = \bar{u} + \frac{2}{3}\bar{v}$
2. $\bar{w} = \frac{1}{3}\bar{u} + \frac{2}{3}\bar{v}$
3. $\bar{w} = \frac{2}{3}\bar{u} - \frac{1}{3}\bar{v}$
4. $\bar{w} = -\frac{2}{3}\bar{u} - \frac{1}{3}\bar{v}$

(ข้อ 2.)

วิธีทำ

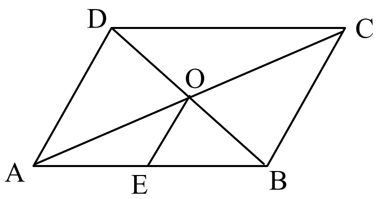
20. AB เป็นส่วนของเส้นตรง P เป็นจุดใดๆ ที่ไม่อยู่บนส่วนของ AB แบ่งครึ่ง AB ที่จุด C ลาก PA , PC และ PB ข้อความต่อไปนี้ ข้อที่ถูกคือ



1. $\overrightarrow{PC} = 4(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB})$
2. $\overrightarrow{PC} = 2(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB})$
3. $2\overrightarrow{PC} = (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB})$
4. $4\overrightarrow{PC} = (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB})$

(ข้อ 3.)

วิธีทำ

21. 

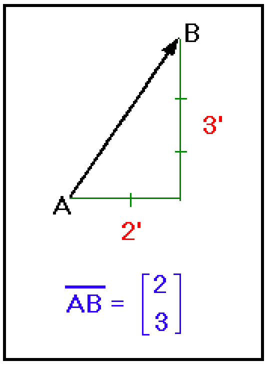
กำหนด ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานเส้นทแยงมุม AC และ BD ตัดกันที่สุด O ลาก OE แบ่ง AB ที่ E ออกเป็น AE : EB = 2 : 3 กำหนดให้ $\overline{AB} = \bar{u}$, $\overline{AD} = \bar{v}$ จงเขียน $\overline{OE}$ ในเทอมของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ $\left(-\frac{1}{10}\,\bar{u} - \frac{1}{2}\,\bar{v}\right)$

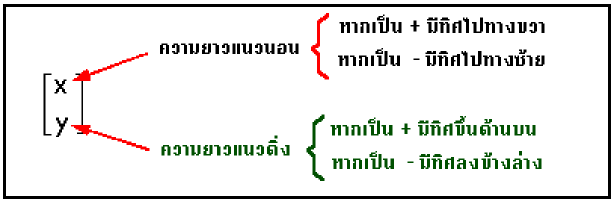
วิธีทำ

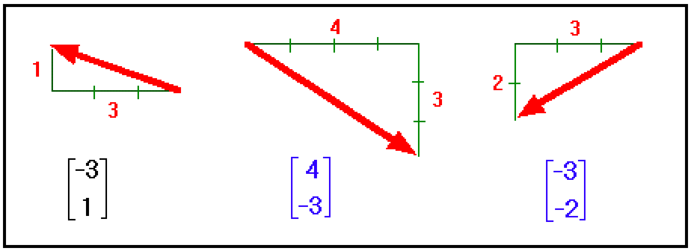
◻◻

ตอนที่ 3 เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

กรณีสองมิติ

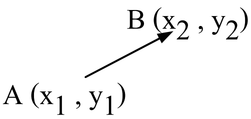






และเมื่อ (x_1 , y_1) และ (y_1 , y_1) เป็นจุดตั้งต้น และจุดปลายของเวกเตอร์ $\overline{AB}$ ใดๆ แล้ว

จะได้ว่า $\overline{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$



22. จงวาดรูปคร่าวๆ ของเวกเตอร์ต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u>

23. กำหนด A (1 , 2) และ B = (3 , 4) จงหา $\overline{AB}$ **($\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$)**

<u>วิธีทำ</u>

24. กำหนด P (–5 , 1) และ Q = (3 , –2) จงหา $\overline{PQ}$ **($\begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix}$)**

<u>วิธีทำ</u>

25. กำหนด C(–2 , –3) และ D(5 , 6) จงหา $\overline{CD}$ และ $\overline{DC}$ **($\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -7 \\ -9 \end{bmatrix}$)**

<u>วิธีทำ</u>

26. กำหนด A(1 , 2) , B(2 , 3) และ C(5 , 6) จงหา $\overline{AB} + \overline{BC}$ **($\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$)**

<u>วิธีทำ</u>

27(มช 36) จงหาเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ (0 , 0) มีความยาว 4 หน่วย และทำมุม -30^{o} กับแกน x **$\begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ -2 \end{bmatrix}$**

<u>วิธีทำ</u>

กรณีสามมิติ

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ จะเขียนอยู่ในรูป $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}$

เมื่อ x คือ ความยาวตามแนวแกน x จากจุดเริ่มต้น

y คือ ความยาวตามแนวแกน y จากจุดเริ่มต้น

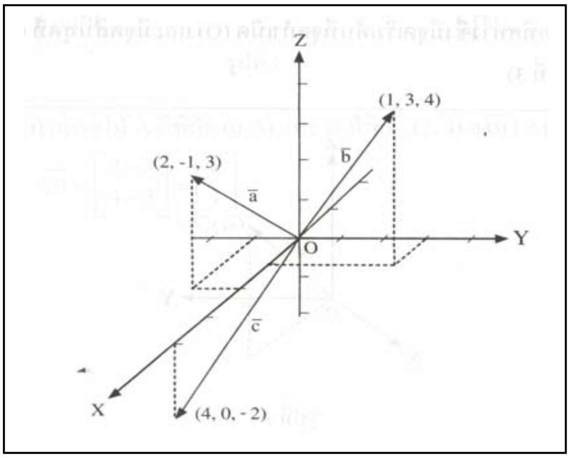
z คือ ความยาวตามแนวแกน z จากจุดเริ่มต้น

เมื่อ (x_1, y_1, z_1) และ (x_2, y_2, z_2) เป็นจุดตั้งต้นและจุดปลายของ $\overline{AB}$ ใดๆ แล้ว

จะได้ว่า $\overline{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$

28. จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในระบบพิกัดฉาก $\bar{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ และ $\bar{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ



29. ให้ P มีพิกัดเป็น (3 , 4 , –4) และ Q มีพิกัดเป็น (5 , 0 ,7) จงหาค่า $\overline{PQ}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 11 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

บทนิยาม	เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ	เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ
การเท่ากัน	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ $a = d$, $b = e$ และ $c = f$
การบวกเวกเตอร์	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{bmatrix}$
การลบเวกเตอร์	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c \\ b-d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-d \\ b-e \\ c-f \end{bmatrix}$
การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์	$\alpha\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix}$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริงใดๆ	$\alpha\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{bmatrix}$
เวกเตอร์ศูนย์	เวกเตอร์ศูนย์คือ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	เวกเตอร์ศูนย์คือ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

30. จงหาเวกเตอร์ต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} =$ ($\begin{bmatrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{8} \end{bmatrix}$)

2) $\begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} =$ ($\begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$)

3) $\begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} =$ ($\begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix}$)

31. กำหนดให้ $\bar{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\bar{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ จงหา $\bar{a} + 2\bar{b}$ **(** $\begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}$ **)**

<u>วิธีทำ</u>

32. กำหนด $\overline{CD} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ C (2 , 3) จงหา D **(–1 , 4)**

<u>วิธีทำ</u>

33. กำหนด $\overline{EF} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix}$ และ F (3 , –4) จงหา E **(5 , 1)**

<u>วิธีทำ</u>

34. กำหนด A(–1 , 3) , B (x , y) , C (4 , 6) และ $\overline{AB} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}$ จงหาเวกเตอร์ $\overline{BC}$

1. $\overline{BC} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$ 2. $\overline{BC} = \begin{bmatrix} -10 \\ 1 \end{bmatrix}$ 3. $\overline{BC} = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix}$ 4. $\overline{BC} = \begin{bmatrix} -10 \\ -1 \end{bmatrix}$ **(ข้อ 3)**

<u>วิธีทำ</u>

<u>เวกเตอร์หนึ่งหน่วย</u>

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย คือ เวกเตอร์ที่มีความยาวหนึ่งหน่วย

ในระบบพิกัดฉากสองมิติ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ควรรู้จักได้แก่ $\bar{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\bar{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ควรทราบว่า $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\,\bar{i} + b\,\bar{j}$

ในระบบพิกัดฉากสามมิติ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ควรรู้จักได้แก่

$$\bar{i} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad , \quad \bar{j} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \bar{k} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

ควรทราบว่า $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$

35. กำหนด $\bar{i} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ และ $\bar{j} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในรูป $\bar{i}$ และ $\bar{j}$

1) $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix}-4\\-5\end{bmatrix}$ 4) $\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$ 5) $\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ 6) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{3}{4}\end{bmatrix}$

__วิธีทำ__

__ตอบ__ **1) $2\bar{i} + 3\bar{j}$ 2) $-3\bar{i} + 4\bar{j}$ 3) $-4\bar{i} + 5\bar{j}$ 4) $3\bar{i}$ 5) $2\bar{j}$ 6) $\frac{1}{2}\bar{i} + \frac{3}{4}\bar{j}$**

36. $\overline{AB}$ มีจุดเริ่มต้นที่ A (1 , 2 , 0) และ จุดปลายที่ B (–2 , 3 , 1) จงหา $\overline{AB}$ ในรูปของ $\bar{i}$, $\bar{j}$ และ $\bar{k}$ $(-3\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$

__วิธีทำ__

37. กำหนด $(b\bar{i} + 4\bar{j}) + (5\bar{i} + 6\bar{j}) = a(4\bar{i} + 5\bar{j})$ ดังนั้น a และ b มีค่าเท่ากับข้อใด

1. a = 2 , b = 3 2. a = 3 , b = 2
3. a = 3 , b = 5 4. a = 5 , b = 3 **(ข้อ 1)**

__วิธีทำ__

38. $\overline{OA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\overline{OB} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ O เป็นจุดกำเนิดในระบบแกนมุมฉาก จงหา $\overline{AB}$ ในรูปของ $\overline{i}$ และ $\overline{j}$ **($2\overline{i} - 2\overline{j}$)**

<u>วิธีทำ</u>

39. ถ้า $\overline{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$; $\overline{OB} = \begin{bmatrix} 18 \\ 22 \end{bmatrix}$ P เป็นจุดๆ หนึ่ง บน AB จงหา $\overline{OP}$ เมื่อ $\overline{AP} : \overline{PB} = 1 : 3$

1. $12\overline{i} + 18\overline{j}$ 2. $\frac{54}{7}\overline{i} + \frac{15}{7}\overline{j}$ 3. $3\overline{i} + 17\overline{j}$ 4. $\frac{9}{2}\overline{i} + 13\overline{j}$ **(ข้อ 4)**

<u>วิธีทำ</u>

<u>เวกเตอร์ที่ขนานกัน</u>

ถ้า $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ขนานกับ $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

และ ถ้า $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ขนานกับ $\begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $a : b : c = d : e : f$

40. เวกเตอร์ต่อไปนี้เวกเตอร์ใดบ้างที่ขนานกัน

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-8\\-4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}9\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}8\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$\left(\begin{bmatrix}-8\\-4\end{bmatrix}\textbf{ ขนานกับ }\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right) \quad , \quad \left(\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\textbf{ ขนานกับ }\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) \quad , \quad \left(\begin{bmatrix}7\\0\end{bmatrix}\textbf{ ขนานกับ }\begin{bmatrix}8\\0\end{bmatrix}\right)$$

41. เวกเตอร์ต่อไปนี้เวกเตอร์ใดบ้างที่ขนานกัน

$$\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\3\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\-4\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-3\\-2\end{bmatrix} \qquad \left(\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\text{ขนาน}\begin{bmatrix}-2\\-4\\-2\end{bmatrix}\right)$$

วิธีทำ

42. ให้ $\bar{u} = a\bar{i} - 2\bar{j}$ และ $\bar{v} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$ จงหาค่า a เมื่อ $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$ **(4/3)**

วิธีทำ

43(มช 33) ถ้า A(4 , –1) , B(m , m) และ C(1 , 2) เป็นจุด 3 จุด ในระบบแกนมุมฉาก และ $\overline{AB} = a\overline{AC}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a \neq 0$ แล้ว m = ………… **($\frac{3}{2}$)**

วิธีทำ

44. ให้ $\bar{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ $\bar{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ $\bar{a} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$ จงเขียน $\bar{a}$ ในรูปของ $\bar{p}$, $\bar{q}$ **$(2\bar{p}+5\bar{q})$**

<u>วิธีทำ</u>

⧅⧅

ตอนที่ 4 ขนาดของเวกเตอร์

กำหนด ความยาวของ $\bar{u}$ เขียนแทนด้วย $|\bar{u}|$

และ ถ้า $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ แล้ว $|\bar{u}| = \left|\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right| = \sqrt{a^2+b^2}$

ถ้า $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ แล้ว $|\bar{u}| = \left|\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

45. จงหาขนาดของเวกเตอร์ต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$
2. $\overline{AB}$ เมื่อพิกัดของ A และ B คือ (1 , 2) และ (5 ,7) ตามลำดับ

<u>วิธีทำ</u>

<u>ตอบ</u> 1) 5 , $\sqrt{61}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ 2) $\sqrt{41}$

46. จงหาขนาดของเวกเตอร์ต่อไปนี้ $\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-4\\0\\-1\end{bmatrix}$ ($\sqrt{11}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{17}$)

<u>วิธีทำ</u>

47. ถ้า $\bar{u} = a\bar{i} + 12\bar{j}$ และ $|\bar{u}| = 13$ จงหา a **(±5)**

<u>วิธีทำ</u>

48(En 39) กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมี D เป็นจุดบนด้าน AB ซึ่งแบ่ง AB เป็นอัตราส่วน $\overline{AD} : \overline{DB} = 3 : 2$ และ $\overline{CA} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$ และ $\overline{CB} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$ แล้ว $|\overline{CD}|$ เท่ากับข้อใด

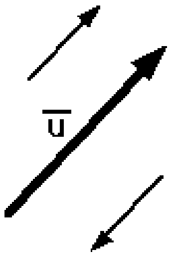
1. $\frac{9}{5}$ 2. $\frac{11}{5}$ 3. $\frac{13}{5}$ 4. $\frac{14}{5}$ **(ข้อ 3)**

<u>วิธีทำ</u>

เวกเตอร์ที่มีความยาว k หน่วย และมีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$ $= \frac{+k}{|\bar{u}|}\bar{u}$

เวกเตอร์ที่มีความยาว k หน่วย และมีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{u}$ $= \frac{-k}{|\bar{u}|}\bar{u}$

เวกเตอร์ที่มีความยาว k หน่วย และขนานกับ $\bar{u}$ $= \frac{\pm k}{|\bar{u}|}\bar{u}$



49. ถ้าเวกเตอร์ $\overline{AB}$ มีจุดเริ่มต้นที่ A (–2 , 1) และมีจุดสิ้นสุดที่ B(1 , 2) แล้วเวกเตอร์ซึ่งยาว $\sqrt{40}$ หน่วย และ มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\overline{AB}$ คือ .... $\left(\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}\right)$

<u>วิธีทำ</u>

50. จงหาเวกเตอร์ที่มีขนาด 3 หน่วย และมีทิศตรงกันข้ามกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$ $\left(-\begin{bmatrix}6/\sqrt{20}\\12/\sqrt{20}\end{bmatrix}\right)$

<u>วิธีทำ</u>

51(มช 41) กำหนด $u = -\overline{i} + 2\overline{j}$ และ $v = \overline{i} + 3\overline{j}$

จงหาเวกเตอร์หน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ $3\overline{u} - \overline{v}$ $\left(\frac{4}{5}\overline{i} - \frac{3}{5}\overline{j}\right)$

<u>วิธีทำ</u>

52(มช 35) จงหาเวกเตอร์ที่มีขนาด 4 หน่วย และขนานกับผลบวกของเวกเตอร์

$\bar{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}$ และ $\bar{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ **(** $\begin{bmatrix} 2 \\ -2\sqrt{3} \end{bmatrix}$ **และ** $\begin{bmatrix} -2 \\ 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$ **)**

<u>วิธีทำ</u>

53. $\overline{AB}$ มีจุดเริ่มต้นที่ A (1 , 2 , 0) และ จุดปลายที่ B (–2 , 3 , 1) จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overline{AB}$ ในรูปของ $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ $(-\frac{3}{\sqrt{11}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{11}}\bar{j} + \frac{1}{\sqrt{11}}\bar{k})$

<u>วิธีทำ</u>

<u>บทนิยาม</u> โคไซน์แสดงทิศทางของ $\bar{u}$ เมื่อ $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

คือ จำนวนสามจำนวนเรียงลำดับดังนี้ $\frac{a}{|\bar{u}|}$, $\frac{b}{|\bar{u}|}$, $\frac{c}{|\bar{u}|}$ โดยที่ $|\bar{u}| \neq 0$

54. ให้ $\bar{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ จงหาโคไซน์แสดงทิศทางของ $\bar{a}$ $\left(\mathbf{\frac{3}{5\sqrt{2}}}, \mathbf{\frac{4}{5\sqrt{2}}}, \mathbf{\frac{5}{5\sqrt{2}}}\right)$

<u>วิธีทำ</u>

> **<u>บทนิยาม</u>**
> เวกเตอร์สองเวกเตอร์ จะมีทิศทางเดียวกัน ก็ต่อเมื่อ มีโคไซน์แสดงทิศทางชุดเดียวกัน และ จะมีทิศทางตรงกันข้าม ก็ต่อเมื่อโคไซน์แสดงทิศทางเทียบแต่ละแกนของเวกเตอร์หนึ่ง เป็นจำนวนตรงข้ามกับโคไซน์แสดงทิศทางของอีกเวกเตอร์หนึ่ง

55. จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์ต่อไปนี้ คู่ใดมีทิศเดียวกัน

ก. เวกเตอร์ $\overline{PQ}$ มีจุดเริ่มต้นที่ P (1 , 2 , 3) และ จุดสิ้นสุดที่ Q (2 , –3 , 5)

ข. เวกเตอร์ $\overline{OR}$ ซึ่งมีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิดและจุดสิ้นสุดที่ R (–3 , 15 , –6)

ค. $\bar{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 4 \end{bmatrix}$ **(** $\overline{PQ}$ **กับ** $\bar{a}$ **)**

<u>วิธีทำ</u>

ตอนที่ 5 ผลคูณเชิงสเกลลาร์

นิยาม ผลคูณเชิงสเกลลาร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เขียนแทนด้วย $\bar{u} \cdot \bar{v}$

ถ้า $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $\bar{u} \cdot \bar{v} = ac + bd$

ถ้า $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $\bar{u} \cdot \bar{v} = ad + be + cf$

56. ถ้า $\bar{u} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$ และ $\bar{v} = -3\bar{i} + 4\bar{j}$ จงหา $\bar{u} . \bar{v}$ **(6)**

วิธีทำ

57. ให้ $\bar{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ และ $\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ จงหา $\bar{a} . \bar{b}$ **(8)**

วิธีทำ

58. ให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\bar{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ

1) $\bar{u} \cdot \bar{v}$ 2) $\bar{u} \cdot \bar{u}$ 3) $\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w})$ 4) $(\bar{u} \cdot \bar{v}) + \bar{w}$ 5) $(\bar{u} \cdot \bar{v}) \cdot \bar{w}$

วิธีทำ

ตอบ **1) 10 2) 25 3) 25 4) ไม่มีนิยาม 5) ไม่มีนิยาม**

สมบัติที่สำคัญของผลคูณเชิงสเกลาร์

1. ให้ $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในสองมิติ หรือสามมิติ และ a เป็นสเกลาร์จะได้ว่า

1.1 $\bar{u}\cdot\bar{v} = \bar{v}\cdot\bar{u}$

1.2 $\bar{u}\cdot(\bar{v}+\bar{w}) = \bar{u}\cdot\bar{v}+\bar{u}\cdot\bar{w}$

1.3 $a(\bar{u}\cdot\bar{v}) = (a\bar{u})\cdot\bar{v} = \bar{u}\cdot(a\bar{v})$

1.4 $\bar{0}\cdot\bar{u} = 0$

1.5 $\bar{u}\cdot\bar{u} = |\bar{u}|^2$

1.6 $\bar{i}\cdot\bar{i} = \bar{j}\cdot\bar{j} = \bar{k}\cdot\bar{k} = 1$

$\bar{i}\cdot\bar{j} = \bar{i}\cdot\bar{k} = \bar{j}\cdot\bar{k} = 0$

2. ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ซึ่ง $0 \le \theta \le 180^\circ$ แล้ว $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

(มุมระหว่างเวกเตอร์ หมายถึง มุมที่ไม่ใช่มุมกลับ ซึ่งมีแขนของมุมเป็นรังสีที่ขนาน และมีทิศทางเดียวกันกับเวกเตอร์ทั้งสอง)

3. ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$

59. ให้ $\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีความยาว 12 หน่วย และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งยาวหนึ่งหน่วย และ $\bar{v}$ ทำมุม 60° กับ $\bar{u}$ จงหา $\bar{u}\cdot\bar{v}$ **(6)**

วิธีทำ

60(มช 38) กำหนดให้ A (2 ,–1) , B (–2 , 2) เป็นจุด 2 จุด และ C เป็นอีกจุดหนึ่งที่ทำให้ $\overline{AC}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\overline{AC}$ ทำมุม 60° กับ $\overline{AB}$ จงหา $(\overline{AB})\cdot(\overline{AC})$ **(2.5)**

วิธีทำ

61. กำหนด $\bar{u} = \bar{i} + 3\bar{j}$ และ $\bar{v} = -\bar{i} + 2\bar{j}$ แล้วมุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ เป็นเท่าใด

1. 30° 2. 45° 3. 60° 4. 90° **(ข้อ 2)**

<u>วิธีทำ</u>

62. จงหามุมระหว่างเวกเตอร์ต่อไปนี้ $\bar{u} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$ และ $\bar{v} = 9\bar{i} + 6\bar{j}$ **(0°)**

<u>วิธีทำ</u>

63. จงหาค่าของมุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$ และ $\bar{v} = \bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k}$

<u>วิธีทำ</u>

64. เวกเตอร์ในข้อใดเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน

1) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ 4) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u>

65. จงหาค่า a ที่ทำให้เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$ **(1 / 6)**

<u>วิธีทำ</u>

66(มข 37) ให้ $\overline{A} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$ จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับ $\overline{A}$ **(**$\begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$ **และ** $\begin{bmatrix} -4/5 \\ -3/5 \end{bmatrix}$**)**

<u>วิธีทำ</u>

67(En 41/2) ให้ $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j}$ โดย $a > 0$ ถ้า $\bar{u}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $-\bar{i} + 2\bar{j}$ แล้วมุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u}$ กับเวกเตอร์ $3\bar{i} - \bar{j}$ (มุมแหลม) มีขนาดกี่องศา **(45^{o})**

<u>วิธีทำ</u>

<u>ควรทราบเพิ่มเติม</u>

1) $|\bar{u} + \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 + 2\bar{u}\cdot\bar{v}$

2) $|\bar{u} - \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 - 2\bar{u}\cdot\bar{v}$

3) $|\bar{u} + \bar{v}|^2 + |\bar{u} - \bar{v}|^2 = 2|\bar{u}|^2 + 2|\bar{v}|^2$

4) $|\bar{u} + \bar{v}|^2 - |\bar{u} - \bar{v}|^2 = 4\bar{u}\cdot\bar{v}$

5) $(\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v}) = |\bar{u}|^2 - |\bar{v}|^2$

68. กำหนด $|\bar{u}| = 13$, $|\bar{v}| = 2$ และ $|\bar{u} + \bar{v}| = 14$ ค่าของ $\bar{u}\cdot\bar{v}$ คือข้อใด

1. –26 2. 26 3. –11.5 4. 11.5 **(ข้อ 4)**

<u>วิธีทำ</u>

69. กำหนดมุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ เป็น 60^{o} และ $|\bar{u}| = 5$, $|\bar{v}| = 8$ แล้ว

จงหา 1. $|\bar{u}+\bar{v}|$ 2. $|\bar{u}-\bar{v}|$ **($\sqrt{129}$, 7)**

วิธีทำ

70(มช 39) กำหนดให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ ถ้า $|\bar{u}| = 2$, $|\bar{v}| = 3$ และ

$|\bar{u}+\bar{v}| = \sqrt{7}$ จงหามุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ **(120^{o})**

วิธีทำ

71. ให้ $|\bar{u}| = a$, $|\bar{v}| = b$ แล้วค่าของ $|\bar{u}+\bar{v}|^2 + |\bar{u}-\bar{v}|^2$ ตรงกับข้อใด

1. $\sqrt{a^2+b^2}$ 2. $\sqrt{2a^2+2b^2}$ 3. a^2+b^2 4. $2a^2+2b^2$ **(ข้อ 4)**

วิธีทำ

72(En 42/1) ถ้า $\left|\bar{u}+\bar{v}\right| = 5\sqrt{2}$ และ $\left|\bar{u}-\bar{v}\right| = \sqrt{26}$ แล้ว $\bar{u}\cdot\bar{v}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3 2. 6 3. 8 4. 12 **(ข้อ 2)**

<u>**วิธีทำ**</u>

73. กำหนด $|\bar{u}| = 4$, $|\bar{v}| = 3$ และ $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ จงหา $|\bar{u}-\bar{v}|$ **(5)**

<u>**วิธีทำ**</u>

74. กำหนด $|\bar{u}| = 15$, $|\bar{v}| = 8$ และ $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ จงหา $|\bar{u}+\bar{v}|$ **(17)**

<u>**วิธีทำ**</u>

ตอนที่ 6 ผลคูณเชิงเวกเตอร์

<u>บทนิยาม</u> ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเขียนแทนด้วย $\bar{u} \times \bar{v}$ อ่านว่า **เวกเตอร์ยูครอสเวกเตอร์วี**

ถ้า $\bar{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

แล้ว $\bar{u} \times \bar{v} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$

หรือ $\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \bar{k}$

75. จงหา $\bar{u} \times \bar{v}$ เมื่อกำหนด

1) $\bar{u} = -\bar{i} + 3\bar{k}$, $\bar{v} = \bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$ $(-9\bar{i} + 7\bar{j} - 3\bar{k})$

2) $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{i}$, $\bar{v} = \bar{i} - 5\bar{j}$ $(-7\bar{k})$

3) $\bar{u} = 2\bar{i} + 3\bar{k}$, $\bar{v} = \bar{i} + 5\bar{k}$ $(-7\bar{j})$

<u>วิธีทำ</u>

<u>สมบัติที่สำคัญของผลคูณเชิงเวกเตอร์</u>

1. กำหนด $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในสามมิติ และ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ

   1.1 $\bar{u} \times \bar{v} = -(\bar{v} \times \bar{u})$

   1.2 $(\bar{u}+\bar{v}) \times \bar{w} = (\bar{u}+\bar{w}) + (\bar{v} \times \bar{w})$

   1.3 $\bar{u} \times (\bar{v}+\bar{w}) = (\bar{u}+\bar{v}) + (\bar{u} \times \bar{w})$

   1.4 $\bar{u} \times (k\bar{v}) = k(\bar{u} \times \bar{v})$

   1.5 $(k\bar{u}) \times \bar{v} = k(\bar{u} \times \bar{v})$

   1.6 $\bar{u} \times \bar{u} = \bar{0}$

   1.7 $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$, $\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$, $\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$

2. ให้ $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในสามมิติ จะได้ว่า $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w}$

3. ถ้า $\bar{u} \neq \bar{0}$ และ $\bar{v} \neq \bar{0}$ จะได้ว่า $|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}| \sin\theta$

   เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$, $0^{\circ} \leq \theta \leq 180^{\circ}$

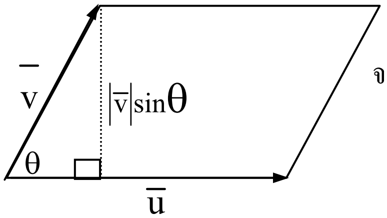
4. ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ซึ่งไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์และไม่ขนานกัน

   จะได้ว่า $\bar{u} \times \bar{v}$ ตั้งฉากกับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

76. ให้ $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} + k$ จงหาค่าของ sine ของมุมระหว่าง $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ **(0.84)**

<u>วิธีทำ</u>

การใช้เวกเตอร์ในการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



จากรูป θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$

$|\bar{v}|\sin\theta$ คือ ส่วนสูงของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ดังนั้น พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน = ฐาน x สูง = $|\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta = |\bar{u} \times \bar{v}|$

77. จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD เมื่อ

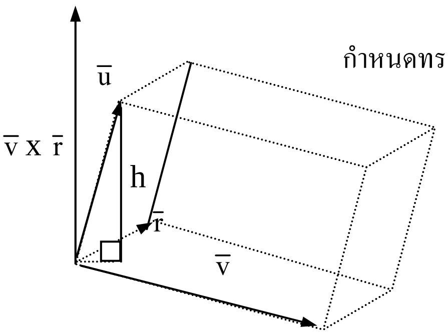
$\overline{AB} = \bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$ และ $\overline{AD} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$ **($11\sqrt{3}$)**

วิธีทำ

78. จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น A (1 , –1 , 3) , B (2 , 3 , –2) และ C(1 , 1 ,5) ตามลำดับ **($\sqrt{83}$)**

วิธีทำ

การใช้เวกเตอร์ในการหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน



กำหนดทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานซึ่งมี $\bar{u}, \bar{v}$ และ $\bar{r}$ เป็นด้าน ดังรูป

จะได้ว่า ปริมาตรของสี่เหลี่ยมด้านขนานทรงตัน $= |\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{r})|$

ข้อสังเกต 1) $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{r}) = \bar{r} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = \bar{v} \cdot (\bar{r} \times \bar{u})$

2) ถ้า $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{r}$ อยู่บนระนาบเดียวกัน แล้วจะได้ว่า $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{r}) = 0$

3) จากเวกเตอร์ 3 เวกเตอร์ใดๆ ถ้าทราบว่าเวกเตอร์เท่ากันสองเวกเตอร์

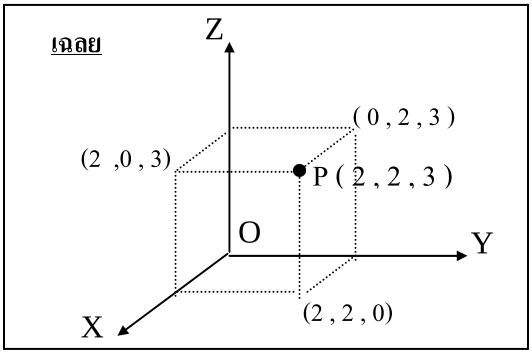
ผลคูณของ $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{v}) = \bar{v} \cdot (\bar{r} \times \bar{r}) = \bar{r}(\bar{u} \times \bar{u}) = 0$

79. จงหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\bar{u} = \bar{i} + \bar{j}$, $\bar{v} = \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{r} = \bar{i} + \bar{k}$ เป็นด้าน **(2 ลูกบาศก์หน่วย)**

วิธีทำ

2. จงหาภาพฉายของจุด P (2 , 2 , 3) บนระนาบ XY , YZ และ XZ

<u>**วิธีทำ**</u>



4. จงพิจารณาว่า รูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ A(1 , 2 , 1) , B (–3 , 7 , 9) และ C(11 , 4 , 2) เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด **(หน้าจั่ว)**

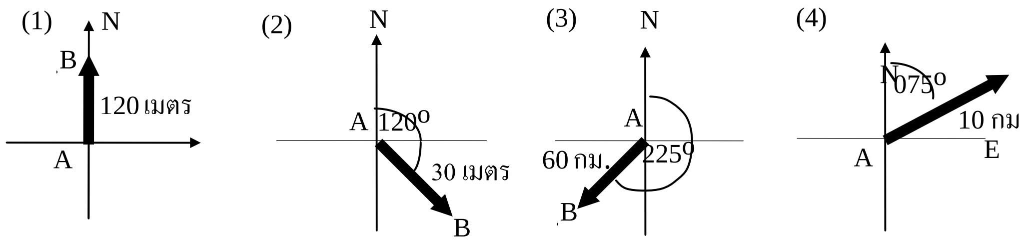
7. จงเขียนส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางแทนปริมาณเวกเตอร์ต่อไปนี้

(การกำหนดทิศทางจะกำหนดโดยบอกค่าของมุมที่วัดจากทิศเหนือตามเข็มนาฬิกาไปยังทิศที่ต้องการ ค่าของมุม จะอยู่ระหว่าง 0^{o} ถึง 360^{o} ถ้าค่าของมุมต่ำกว่า 100^{o} จะเขียนศูนย์นำทุกครั้ง ระบบที่ใช้นี้เรียกว่า **three figure system**)

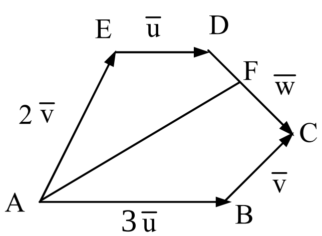
(1) 120 เมตร ในทิศเหนือ (2) 30 เมตร ในทิศ 120^{o}

(3) 60 กิโลเมตร ในทิศ 225^{o} (4) 10 กิโลเมตร ในทิศ 075^{o}

<u>**ตอบ**</u>



21.



จากรูป กำหนดให้ $\overrightarrow{ED} = \bar{u}$, $\overrightarrow{BC} = \bar{v}$, $\overrightarrow{AB} = 3\bar{u}$ $\overrightarrow{AE} = 2\bar{v}$ และ $\overrightarrow{DC} = \bar{w}$ ถ้า F เป็นจุดกึ่งกลางของ CD จงเขียน $\overrightarrow{AF}$ ในรูป $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

($2\bar{u} + \frac{3}{2}\bar{v}$)

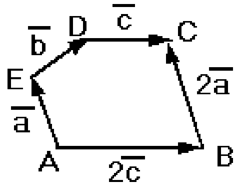
27(En 35) ให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส และ M , N เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC และ CD ตามลำดับให้ $\bar{u} = \overline{AM}$ และ $\bar{v} = \overline{AN}$ แล้ว $\overline{AB}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{2}\bar{u} - \frac{1}{2}\bar{v}$ 2. $\frac{3}{2}\bar{u} - \bar{v}$ 3. $\frac{2}{3}\bar{u} - \frac{1}{2}\bar{v}$ 4. $\frac{4}{3}\bar{u} - \frac{2}{3}\bar{v}$ **(ข้อ 4)**

28. จากรูปกำหนดให้

จงเขียน $\overline{AC}$ และ $\overline{CD}$

ในรูปของ $\bar{a}$ และ $\bar{b}$



($2\bar{b}$ **,** $\bar{a}-\bar{b}$ **)**

29. หน่อยเดินทางไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือเป็นระยะทาง 5 กิโลเมตร แล้วเดินทางต่อไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือเป็นระยะทาง 5 กิโลเมตร ดังนั้นเขาจะอยู่ห่างจากจุดตั้งต้นเท่าใด และอยู่ในทิศทางใดของจุดตั้งต้น **(** $\sqrt{50}$ **)**

47. ถ้า $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ แทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ ตามลำดับ O เป็นจุดกำเนิดในระบบแกนมุมฉาก จงหา $\overline{AB}$, $\overline{BA}$ ($\overline{\mathbf{AB}} = \begin{bmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix}$ **และ** $\overline{\mathbf{BA}} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} \end{bmatrix}$)

49. เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิดและมีจุดสิ้นสุดไปยังจุดที่แบ่งส่วนของเส้น AB ออกเป็นอัตราส่วน 2 : 1 เมื่อให้ A และ B มีพิกัด เป็น (1 , 3) กับ (4 , –3) คือ

1. $3\bar{i} - \bar{j}$ 2. $-3\bar{i} + \bar{j}$ 3. $3\bar{i} + \bar{j}$ 4. $-3\bar{i} - \bar{j}$ **(ข้อ 1)**

55. ให้ $\bar{p} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\bar{q} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ และ $\bar{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$

จงหาค่าของสเกลลาร์ h , k เมื่อ $\bar{a} = h\bar{p} + k\bar{q}$

1. h = 1 , k = 2 2. h = 3 , k = 4

3. h = 2 , k = 3 4. h = 4 , k = 5 **(ข้อ 3)**

60(มช 32) เวกเตอร์ $\bar{u} = 2\bar{i} + 4\bar{j}$ และ $\bar{v} = (m+n)\bar{i} + (3m-n)\bar{j}$ ค่า m และ n ที่ทำให้เวกเตอร์ $\bar{v}$ มีขนาดเป็น 2 เท่าของเวกเตอร์ $\bar{u}$ และมีทิศทางตรงกันข้ามกับทิศทางของเวกเตอร์ $\bar{u}$ คือ m = ……..... , n = ……..... **(m = –3 และ n = –1)**

65. กำหนดให้ $\bar{u} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ และ $\bar{v} = 8\bar{i} + 6\bar{j}$ เวกเตอร์ที่มีทิศทางไปทางเดียวกันกับ $\bar{u}$ และมีขนาดเท่ากับ $\bar{v}$ คือ

1. $6\bar{i} - 8\bar{j}$ 2. $6\bar{i} + 8\bar{j}$ 3. $4\bar{i} + 3\bar{j}$ 4. $4\bar{i} - 3\bar{j}$ **(ข้อ 2)**

66. กำหนดให้ $\bar{u} = 2\bar{i} + 2\bar{j}$ และ $\bar{v} = -4\bar{i} + 4\bar{j}$ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$ แต่มีขนาดเท่ากับ $\bar{v}$ แล้ว จงหาค่าของ $|\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}|$

1. 8 2. 10 3. $\sqrt{104}$ 4. $\sqrt{109}$ **(ข้อ 3)**

69. จงหาโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ P (0 , 3 , 5) และจุดสิ้นสุดที่ Q (–1 , 5 , 2) $\mathbf{\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}\right)}$

74(En 36) กำหนดให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ถ้า $\bar{u} \cdot \bar{w} = -11$, $\bar{v} \cdot \bar{w} = 8$ แล้ว $|\bar{w} - \bar{v}|$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{2}$ 2. $\sqrt{3}$ 3. $\sqrt{5}$ 4. $\sqrt{7}$ **(ข้อ 1)**

79(En 43/1) ให้ $\bar{u} = \bar{i} + 3\bar{j}, \bar{v} = 2\bar{i} + \bar{j}$ เป็น θ เป็นมุมระหว่าง $(\bar{u} + \bar{v})$ และ $(\bar{u} - \bar{v})$ แล้ว $\text{Cos}\theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 2. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ 3. $\frac{1}{5}$ 4. $\frac{2}{5}$ **(ข้อ 1)**

80. จงหาค่าของมุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$ และ $\bar{v} = -\bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k}$

85(En 32) กำหนดให้ $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j}$ โดยที่ $b > 0$ ถ้าเวกเตอร์ $\bar{u}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\bar{i} - 2\bar{j}$ และมุม θ เป็นมุมเวกเตอร์ $\bar{u}$ ทำกับเวกเตอร์ $\bar{i} + \bar{j}$ แล้ว $9\tan\theta$ เท่ากับข้อใด

1. 1 2. 2 3. 3 4. 4 **(ข้อ 3)**

8(En 44/2) กำหนดจุด A(1 , 1) , B(4 , 10) , C(7 , 9) และ D เป็นจุดที่อยู่บนด้าน AB โดยที่ $\frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{2}{3}$ ถ้า θ คือมุมระหว่าง $\overrightarrow{CA}$ และ $\overrightarrow{DC}$ แล้ว $\cos\theta$ คือค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{-2}{\sqrt{5}}$ 2. $\frac{-2}{\sqrt{10}}$ 3. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ 4. $\frac{2}{\sqrt{10}}$ **(ข้อ 1)**

9(En 45/1) กำหนดจุด P(–1 , 2) , R(3 , 3) , O(0 , 0) และ Q เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรง $\overline{PR}$ โดยที่ $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{PR}|$ ถ้า A (x , y) เป็นจุดในควอดรันต์ที่ 2 ที่ทำให้ $\overrightarrow{OA}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{OQ}$ และ $|\overrightarrow{OA}| = 5$ หน่วย แล้ว $x + y$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{-6}{\sqrt{10}}$ 2. $\frac{-6}{\sqrt{2}}$ 3. $\frac{6}{\sqrt{10}}$ 4. $\frac{6}{\sqrt{2}}$ **(ข้อ 2)**

89. กำหนด $|\bar{u}| = 6$, $|\bar{v}| = 8$ และ $|\bar{u} - \bar{v}| = 2\sqrt{37}$ ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง **(ข้อ 2)**

1. $\theta = 90^{\circ}$ 2. $\theta = 120^{\circ}$ 3. $\theta = 135^{\circ}$ 4. $\theta = 150^{\circ}$

90. ให้ $\bar{u} - \bar{v} - \bar{w} = \bar{0}$ และ $|\bar{u}| = 10$, $|\bar{v}| = 6$, $|\bar{w}| = 14$

มุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ

1. $\frac{\pi}{6}$ 2. $\frac{\pi}{4}$ 3. $\frac{\pi}{3}$ 4. $\frac{2\pi}{3}$ **(ข้อ 4)**

92(En 35) ถ้า $|\bar{u}| = 4$, $|\bar{v}| = 3$ และ $|\bar{u} + \bar{v}| = 6$ แล้ว $|\bar{u} - \bar{v}|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. $\sqrt{14}$ 3. $\sqrt{11}$ 4. $\frac{11}{2}$ **(ข้อ 2)**

101. จงหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{r}$ ดังนี้

1) $\bar{u} = \bar{i} + \bar{k}$, $\bar{v} = \bar{i} + \bar{j}$, $\bar{r} = \bar{j} + \bar{k}$

2) $\bar{u} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}$, $\bar{v} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{r} = \bar{i} + \bar{j} + 2k$